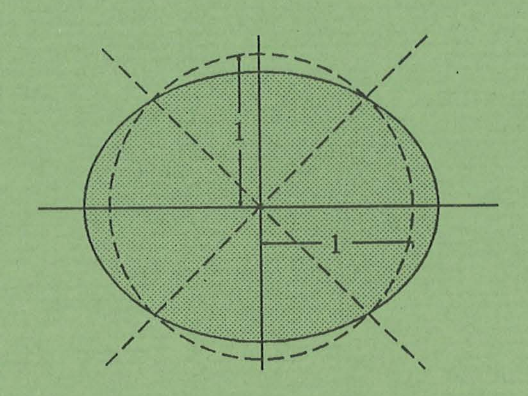
APUNTES DE ELASTICIDAD

por

AGUSTÍN MARTÍN DOMINGO



CUADERNOS
DEL INSTITUTO
JUAN DE HERRERA
DE LA *ESCUELA DE*
ARQUITECTURA
DE MADRID

APUNTES DE ELASTICIDAD

por

AGUSTÍN MARTÍN DOMINGO

CUADERNOS
DEL INSTITUTO
JUAN DE HERRERA
DE LA *ESCUELA DE*
ARQUITECTURA
DE MADRID

Apuntes de Elasticidad

Instituto Juan de Herrera.
Escuela Técnica Superior de Arquitectura de Madrid.
CUADERNO 13.01
ISBN: 84-89977-10-0
Depósito Legal: M-3089-1998

Tabla de materias

Presentación

Estos apuntes surgieron con un objetivo meramente personal, poner en claro de una forma ordenada mis clases de elasticidad en la asignatura Ampliación de Física, la cual he impartido durante los últimos años en la Escuela Superior de Arquitectura de Madrid, de forma me resultara más fácil y "elegante" mantenerlos al día con nuevas cosas que a mí me apeteciera incluir, o distintas formas de ver las cosas basadas en la experiencia de los distintos cursos, sin necesidad de acumular correcciones sobre correcciones en mis apuntes originales sobre papel.

Con el tiempo algunas personas me sugirieron que podría ser de utilidad publicarlos aprovechando la colección de apuntes de la E.T.S.A.M. y ya que los tenía pasados al ordenador la verdad es que me suponía únicamente un pequeño esfuerzo, por lo que he decidido aprovechar la ocasión y hacerlos públicos.

A pesar de ello siguen siendo en gran parte unos apuntes de trabajo y por tanto, no constituyen una obra terminada y, de hecho, ni siquiera puedo asegurar que estén libres de errores, pero a pesar de ello me parece que pueden ser útiles tanto para los alumnos de Ampliación de Física como de otras asignaturas, aunque sólo sea para conocer cuál es mi planteamiento de la asignatura.

En estos apuntes pretendo, en el primer tema, dar una visión cualitativa de la asignatura para pasar después a un tratamiento más formal, intentando no perder de vista en ningún momento lo que hay detrás de las ecuaciones. Ciertamente algunos de los temas se podrían haber presentado con un mayor rigor y profundidad, por ejemplo, el apéndice de tensores está manifiestamente incompleto (también es cierto que es el más reciente) y un poco cojo desde un punto de vista matemático, pero el tiempo empleado es el que hay y no renuncio a mejorarlo en un futuro.

Como he dicho es altamente probable que en estos apuntes se hayan deslizado diversos gazapos. Si el lector descubre uno le agradecería me lo hiciera saber, bien personalmente, bien por correo ordinario a la E.T.S.A.M. o bien por correo electrónico a `agmartin@aq.upm.es`.

Finalmente quiero hacer constar que estos apuntes se han compuesto utilizando LaTeX ese maravilloso y libre procesador de textos. Por ello no quiero dejar de mencionar mi agradecimiento a las personas que lo hicieron posible, en primer lugar Donald Knuth, el creador de TeX, el procesador sobre el que funciona LaTeX, a Leslie Lamport, que escribió todo el conjunto de macros LaTeX, y a todas las personas que día a día trabajan para hacer TeX y LaTeX un poquito más potentes que ayer.

Agustín Martín Domingo
Departamento de Física e Instalaciones
E.T.S. Arquitectura de Madrid
`http://corbu.aq.upm.es/~agmartin/welcome.html`

1 Introducción a la Elasticidad.

1.1 Introducción.

1.1.1 Diferencias entre líquidos y sólidos.

En temas anteriores se ha estudiado como se transmiten las fuerzas en líquidos, y cual es la energía necesaria para deformar un líquido. Se ha visto que esta energía depende solamente del cambio de volumen producido en el líquido. Los líquidos se resisten a cambiar de volumen, pero no de forma.

En el caso de los sólidos nos encontramos conque éstos se resisten a cambiar tanto de volumen como de forma. Así, la energía de deformación de un sólido depende tanto de la variación de volumen como de la variación de forma.

Asimismo, se ha visto que en el caso de los líquidos, la fuerza sobre una superficie por unidad de superficie es la misma con independencia de la orientación de la superficie (principio de Pascal), para un punto determinado, y es siempre perpendicular a la pared del recipiente (en general perpendicular a la superficie sobre la que se ejerce la presión). Al no haber fuerzas tangenciales no hay resistencia del líquido a cambiar de forma (en condiciones de equilibrio, ya que en condiciones de no equilibrio en fluidos reales aparecen fuerzas tangenciales y es necesario tener en cuenta el efecto de la viscosidad).

Por el contrario, la fuerza transmitida a través de una superficie en un sólido depende de la orientación de ésta, y es en general distinta para direcciones distintas. Las presiones que aparecen en un cuerpo al deformarlo se denominan **tensiones elásticas** y pueden tener cualquier dirección con respecto a la superficie sobre la que actúan, en vez de ser perpendiculares a las superficies como ocurría en el caso de los líquidos.

En un líquido no hay fuerzas actuando sobre puntos aislados. Las fuerzas que actúan sobre un líquido son siempre bien fuerzas de masa como la fuerza gravitatoria, o bien fuerzas que actúan a través de una superficie, como la fuerza ejercida sobre el líquido por la pared del recipiente. En cambio, sobre un sólido las fuerzas pueden actuar sobre puntos aislados (en realidad sobre pequeñas superficies) o sobre superficies extensas, pueden proceder de las ligaduras (p. ej. de los apoyos) o de causas externas (p. ej. fuerzas de masa), pueden ser de superficie (p. ej. la ejercida por un líquido sobre la pared del recipiente) o de volumen (p. ej. la fuerza gravitatoria). En general, las fuerzas que impiden o dificultan la deformación o ruptura de un sólido son debidas a la atracción entre los átomos y tienen un pequeño radio de acción.

1.1.2 Diferencias entre un sólido rígido y un sólido elástico.

El sólido rígido es un modelo simplificado de sólido que correspondería a un hipotético sólido que fuera perfectamente no deformable. Para estos sólidos rígidos, las fuerzas externas aplicadas no se transmitirían hacia el interior del sólido, y por tanto, la parte interior del sólido no notaría la fuerza debida a las fuerzas aplicadas sobre su superficie, y por tanto, no se produciría una deformación ni interior ni exterior en el sólido. Simplemente aparecería en la superficie del sólido una fuerza de reacción que se opondría a la fuerza externa aplicada. Por el contrario, cuando tratamos con un sólido real, es decir, con un sólido elástico, es necesario tener en cuenta que las fuerzas aplicadas se transmiten a todo el sólido y que por tanto, se producen deformaciones en todo el mismo. Además de las fuerzas de reacción que ya aparecían en el caso del sólido perfectamente rígido, ahora aparecen unas fuerzas internas elásticas en todo el

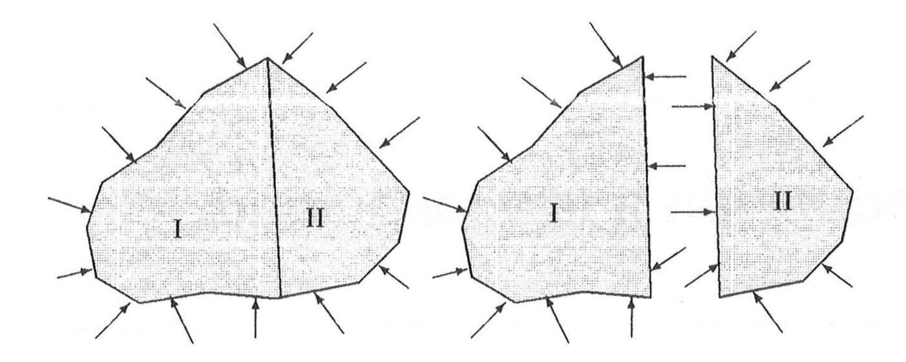


Figura 1-1: Fuerzas internas en un sólido. Si llevamos a cabo un corte imaginario del sólido, el sistema real de fuerzas ejercido a través de esa superficie por una parte del material sobre la otra y viceversa deberá ser tal, que, al hacer el corte cada uno de los subsistemas esté en equilibrio mecánico.

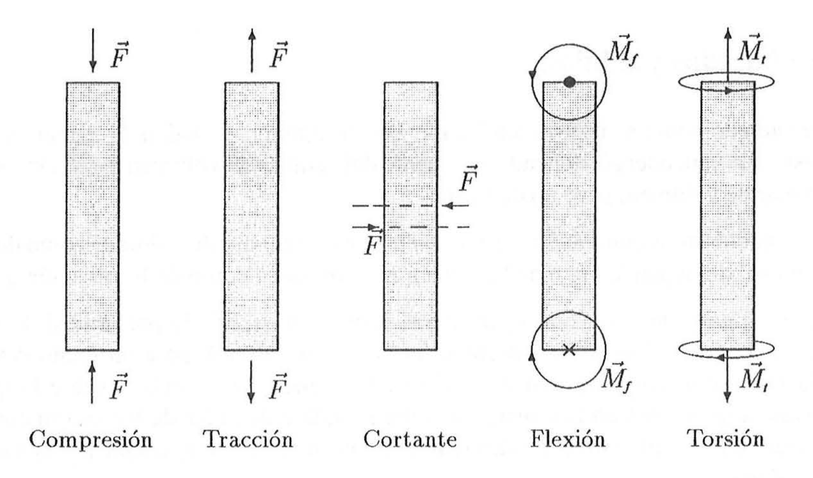


Figura 1-2: Tipos de sistemas elementales de fuerzas que actúan sobre sólido, dando lugar su superposición al sistema de fuerzas complejo que en realidad actúa sobre el mismo.

volumen del sólido.

Al igual que en el caso de los líquidos, hay una interacción entre la materia que se encuentra a un lado y a otro de cualquier superficie imaginaria. Supongamos un cuerpo que se encuentra en estado de equilibrio elástico, sometido a un conjunto de fuerzas sobre su superficie exterior, al que de forma imaginaria dividimos en dos partes I y II mediante una superficie imaginaria de separación.

Cada una de estas partes imaginarias deberá de seguir por separado en equilibrio bajo la acción de las fuerzas externas localizadas en ella (que ya actuaban originalmente) y un sistema de fuerzas actuando sobre la superficie de separación que equivalga al efecto del conjunto de fuerzas ejercido por la otra parte sobre la parte considerada, antes de la separación.

El principio de acción y reacción impone que la fuerza total ejercida por la parte I sobre la II sea igual en magnitud y de sentido contrario a la ejercida por la II sobre la I.

1.2 Sistemas elementales de fuerzas que actúan sobre un cuerpo.

El sistema real de fuerzas que actúa sobre un cuerpo (y que da lugar a un estado de tensiones, con sus deformaciones y en el caso extremo, roturas) es en general complejo, combinación de una serie de fuerzas y sistemas de fuerzas más simples o elementales que se estudiarán individualmente. Estos sistemas simples de fuerzas son los siguientes:

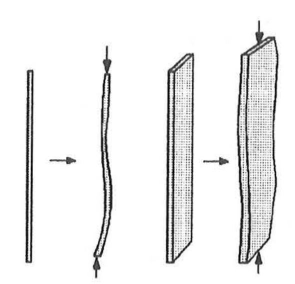


Figura 1-3: Otros tipos de deformaciones más complejas: pandeo y abolladura.

Tracción: Por ejemplo, la que aparece en un cable. En este caso, el sistema de fuerzas está compuesto por dos fuerzas iguales y de sentido contrario, aplicadas sobre la misma línea de acción, de forma que dan como consecuencia un alargamiento.

Compresión: Por ejemplo, la que aparece en columnas o pilares. En este caso, el sistema de fuerzas está compuesto por dos fuerzas iguales y de sentido contrario, aplicadas sobre la misma línea de acción, de forma que dan como consecuencia un acortamiento.

Cortante: Corresponde a la forma de trabajo de una cizalla (máquina de cortar chapas o perfiles metálicos). Se la conoce también como tensión de cizalladura o de cizallamiento o tensión tangencial. En este caso, el sistema de fuerzas está compuesto como antes por dos fuerzas iguales y de sentido contrario, pero aplicadas sobre líneas de acción paralelas entre sí.

Flexión: Aparece, por ejemplo, en una viga cargada. En este caso, el sistema está compuesto por dos subsistemas de fuerzas, cada uno de ellos dando una fuerza total resultante cero y momentos resultantes iguales y de sentido contrario (momento total resultante nulo), aplicados en líneas de acción distintas, pero paralelas.

Torsión: Es la deformación que corresponde a retorcer una pieza. Igual que en el caso de la flexión, el sistema está compuesto por dos subsistemas de fuerzas, cada uno de ellos dando una fuerza total resultante cero y momentos resultantes iguales y de sentido contrario (momento total resultante nulo), pero ahora aplicados en la misma línea de acción.

Tanto la tracción como la compresión y el cortante están causados por fuerzas "simples", iguales y opuestas (para una pieza alargada, paralelas al eje en los dos primeros casos y perpendiculares en el tercero). Por el contrario, tanto la flexión como la torsión están causadas por pares de fuerzas, con momentos paralelos o perpendiculares al eje, según de cual se trate, e iguales y de sentidos opuestos.

Otra deformación que no se tratará es la que se produce en una varilla fina o en un bastón sin sujeción lateral que es comprimido. Esta se muestra en la figura 1-3 y se denomina **pandeo**, teniendo lugar incluso con cargas relativamente pequeñas. Cuando ésto ocurre con una placa se denomina **abolladura**. Ambas son consecuencia de la inestabilidad elástica de los cuerpos sometidos a estas fuerzas y su tratamiento es mucho más complejo y menos repetitivo, por lo que no se insistirá en ellos.

1.3 Rango de validez.

El comportamiento de los materiales al ser sometidos a tracción depende de la magnitud de la fuerza de tracción. Para un elemento determinado, de unas dimensiones dadas, hecho de un material deformable típico, se tiene una primera etapa de comportamiento elástico. En este rango elástico, al cesar la fuerza que produce la deformación, el material recupera sus dimensiones originales. Para fuerzas mayores que las correspondientes a la zona elástica, se entra en la zona plástica. Cuando se ha alcanzado este régimen, al cesar la fuerza que produce la deformación, el material no recupera sus dimensiones iniciales, sino que queda una deformación residual permanente. Se dice en este caso que se produce histéresis del material.

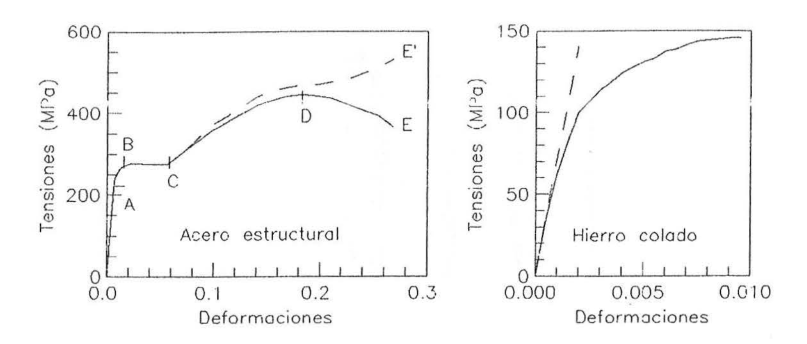


Figura 1-4: Comportamiento tensión-deformación del acero estructural y del hierro colado en distintos rangos de fuerzas aplicadas.

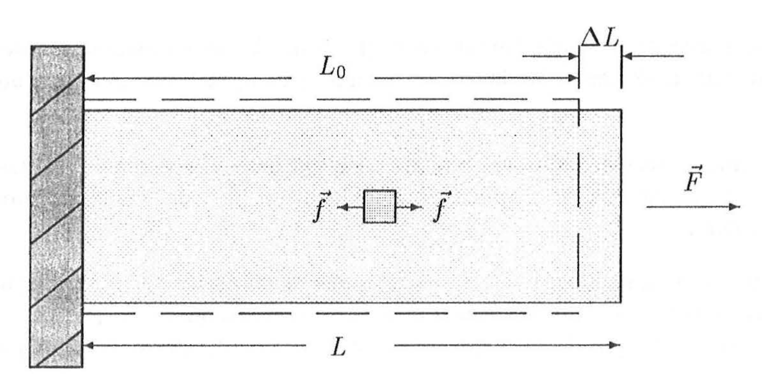


Figura 1-5: Tracción (compresión) simple en una barra.

Para la mayor parte de los materiales, el comportamiento en la región elástica de pequeñas fuerzas aplicadas es lineal, es decir, existe una relación lineal entre la fuerza aplicada y la deformación producida, el cociente entre ambas es constante. Este comportamiento lineal se mantiene en buena parte de los materiales para fuerzas correspondientes a las proximidades de la zona plástica.

Además de los materiales elásticos lineales mencionados, hay materiales elásticos no lineales, en los que en la zona elástica se recuperan las dimensiones iniciales al cesar la fuerza, y en la plástica no, pero en los que la dependencia fuerza-deformación en la zona elástica es no lineal.

En todo lo que sigue se estudiarán materiales elásticos lineales trabajando en la zona elástica, fuera de la zona plástica. Además, las deformaciones que se estudiarán serán en general muy pequeñas comparadas con las dimensiones originales del material objeto de estudio.

1.4 Tracción (Compresión) simple sobre una barra.

1.4.1 Descripción del fenómeno.

Consideremos una varilla de un material elástico lineal, uno de cuyos extremos está fijo a la parte superior, a la que se aplica una fuerza $\vec{F}$ que tiende a alargarla (o a acortarla, dependiendo del signo). Por el principio de acción y reacción, fijar el extremo de la varilla a la parte superior equivale a aplicar al extremo fijo una fuerza igual y de sentido opuesto a la aplicada al extremo libre.

El primer problema que surge es determinar cuáles son las magnitudes macroscópicas que debemos medir para tener determinado el estado de tensiones de la varilla que estamos estudiando. Para ello consideramos un pequeño elemento de volumen de control, por ejemplo cúbico, en el interior de la varilla y vemos si la magnitud más inmediata, la fuerza, es una magnitud conveniente. Para que lo sea, será necesario que aunque utilicemos una varilla de distintas

dimensiones, al aplicar la misma fuerza $\vec{F}$ a la cara inferior de la varilla, se tenga siempre la misma fuerza $\vec{f}$ en las caras superior e inferior del elemento de volumen. Considerando los casos de dos varillas de secciones normal y doble, se ve fácilmente que esto no es así, ya que la fuerza que actúa sobre las caras superior e inferior del elemento de volumen, para una misma fuerza $\vec{F}$ aplicada a ambas varillas, es $\vec{f}$ en el caso de la varilla de sección normal y $\vec{f}/2$ en el de la varilla de sección doble, por lo que la fuerza no es la magnitud ideal. En su lugar se utiliza la fuerza por unidad de superficie o fuerza de tracción unitaria $\vec{F}/S = \vec{\sigma}$, a la que se denomina **tensión** y que es independiente de la sección de la varilla. Obviamente, las dimensiones de esta tensión son las correspondientes a una presión.

Estas tensiones deberán ser iguales a lo largo de toda la varilla.[1]Esto significa que sobre el material de dentro del elemento de volumen, y a través de las caras superior e inferior del mismo, estará aplicada, por parte del material de fuera del elemento de volumen, la misma tensión σ (si ésto no fuera así, el elemento de volumen en cuestión no estaría en equilibrio). Así, cada unidad de longitud de la varilla está sometida a la misma tracción (o compresión) y por tanto, se alarga (o se encoge) lo mismo, por lo que el alargamiento total de la varilla será proporcional a la longitud total de la misma. Como lo que nos interesa realmente es describir el grado de deformación mediante una magnitud independiente de las dimensiones (en este caso la longitud) de la varilla, se utiliza la deformación unitaria, o simplemente deformación, ϵ, definida en la forma:

$$\epsilon = \frac{\Delta L}{L} \simeq \frac{\Delta L}{L_0} \tag{1-1}$$

donde se supone que $\Delta L \ll L, L_0$, es decir, que nos estamos restringiendo al caso de deformaciones pequeñas. Aquí, L_0 es la longitud inicial de la varilla antes de la deformación. La deformación unitaria que hemos definido aquí es una magnitud adimensional independiente de la longitud de la varilla y es una buena medida del grado de deformación de cada parte del sólido.

El convenio de signos que se utilizará de aquí en adelante es el siguiente: Las tensiones normales y deformaciones unitarias serán tomadas como positivas en el caso de la tracción (hay alargamiento, la longitud aumenta) y negativas en el caso de la compresión (hay acortamiento y la longitud disminuye).

1.4.2 Ley de Hooke. Módulo de Young.

Como consecuencia de la gran resistencia de los sólidos, las deformaciones que sufren a causa de las fuerzas externas son en general muy pequeñas comparadas con las dimensiones del sólido. En esta aproximación de pequeñas variaciones se recuperan las dimensiones originales al desaparecer la fuerza que producía la deformación (es decir trabajamos en la zona elástica), y para materiales elásticos lineales, estas variaciones son proporcionales a las tensiones que las originan. Esta dependencia lineal se conoce como **Ley de Hooke** y tiene la forma:

$$\sigma = E\epsilon \qquad \text{o} \qquad \epsilon = \frac{\sigma}{E} \tag{1-2}$$

donde aparece la constante de proporcionalidad E, conocida como módulo de Young o módulo de elasticidad, característico del material. El módulo de Young tiene dimensiones de presión, y cuanto mayor es su valor, tanto más indeformable es el sólido. En la tabla 1-1 se dan unos cuantos ejemplos de módulos de Young que pueden variar algo dependiendo de la muestra concreta utilizada.

El módulo de Young no caracteriza por completo las propiedades elásticas del cuerpo, ya que en la tracción, al alargarse la varilla, ésta se hace más delgada. El módulo de Young permite calcular la deformación unitaria longitudinal de la varilla, pero no da ninguna información acerca de la transversal. La experiencia muestra que, en general, la deformación unitaria transversal ϵ_t es proporcional a la longitudinal ϵ_l a través de una constante de proporcionalidad ν en la forma:

$$\epsilon_t = -\nu\epsilon_l = -\frac{\nu\sigma}{E} \tag{1-3}$$

donde ν es una magnitud adimensional conocida como coeficiente de Poisson que según la experiencia puede tener valores en el rango $0 \leq \nu \leq \frac{1}{2}$. Esta magnitud ν toma el valor 0 para cuerpos porosos que no se contraen lateralmente, en los cuales lo que se produce es un aumento del tamaño de los poros. En la tabla 1-2 se dan algunos valores típicos, que pueden variar de forma importante dependiendo de la muestra concreta utilizada. De este modo, las propiedades elásticas de un material homogéneo e isótropo quedan caracterizadas por las dos magnitudes E y ν.

[1]Realmente lo que debe ser igual a lo largo de toda la varilla es la fuerza $\int \sigma dA$, pero en el caso de pequeñas deformaciones al que nos estamos

Tabla 1-1: Módulos de Young E para diversos materiales.

1Pa = 1 N/m^2, 1GPa = 10^9 Pa			
Iridio:	520 GPa	Cobre:	100-140 GPa
Acero:	180-250 GPa	Cuarzo(fundido):	73 GPa
Hielo(a -2°C):	3 GPa	Aluminio:	70 GPa
Caucho:	0.5 GPa	Oro:	80 GPa
Plomo:	16 GPa	Bronce:	100-120 GPa
Madera de roble:	13 GPa		

Tabla 1-2: Coeficientes de Poisson para diversos materiales

Oro:	0,42	Cobre:	0,34	Plomo:	0,44
Acero:	0,28	Cuarzo:	0,14	Caucho:	0,42
Aluminio:	0,34	Bronce:	0,36	Hierro:	0,27

1.4.3 Energía elástica de deformación en la tracción.

El trabajo realizado en la deformación elástica de un cuerpo se acumula en forma de energía elástica. Calcularemos esta energía para una barra sometida a tracción. El trabajo elemental δW producido por una fuerza de tracción $\vec{F}$ que aumenta la longitud de la barra en $dL = d[L_0(1+\epsilon)] = L_0 d\epsilon$ será:

$$\delta W = FdL = FL_0 d\epsilon = S\sigma L_0 d\epsilon = SE\epsilon L_0 d\epsilon = \epsilon EV d\epsilon = EVd\left(\frac{\epsilon^2}{2}\right) = \delta W \tag{1-4}$$

Así, integrando esta expresión, se tiene que si la deformación unitaria de la barra varía desde 0 hasta una magnitud ϵ se efectuará un trabajo:

$$\frac{1}{2}EV\epsilon^2 \tag{1-5}$$

y cada unidad de volumen de la barra deformada "almacena" la siguiente cantidad de energía elástica:

$$\mathcal{U} = \frac{E\epsilon^2}{2} = \frac{1}{2}\epsilon\sigma = \frac{\sigma^2}{2E} \tag{1-6}$$

Esta es la energía que utiliza el material para realizar un trabajo contra la fuerza externa, cuando ésta disminuye y el cuerpo va recuperando sus dimensiones originales.

1.4.4 Deformación volumétrica.

Generalizaremos ahora las fórmulas que se han visto para la tracción simple al caso de deformaciones homogéneas cualesquiera en las que tenemos sólo tracciones o compresiones, pero en las tres direcciones. Para ello consideraremos una lámina de un material isótropo en forma de paralelepípedo rectangular que se estira o comprime por la aplicación de fuerzas en todas sus caras.

Las fuerzas F_x, F_y y F_z serán en general distintas entre sí, y como consecuencia de la aplicación de las mismas, se crearán tensiones elásticas $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$ que a su vez serán en general distintas entre sí. Tanto para las tensiones como para las deformaciones unitarias utilizaremos el convenio:

Tracción	σ, ϵ, F positivas
Compresión	σ, ϵ, F negativas

restringiendo, la sección cambiaría muy poco de un punto a otro, y ello debido a las ligaduras en los apoyos. Si no hubiera esas ligaduras y la sección es originalmente uniforme, también lo sería después de la deformación.

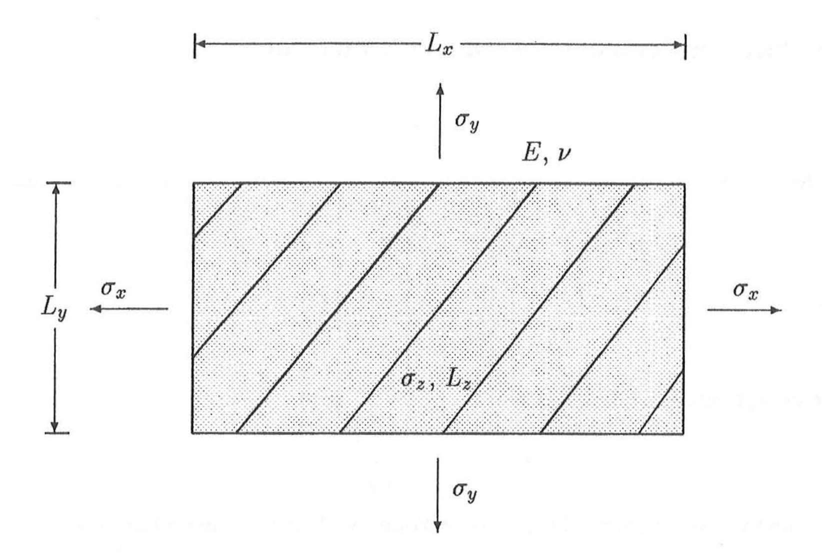


Figura 1-6: Tensiones y deformaciones en tres dimensiones

En este caso, tendremos deformaciones unitarias ϵ_x, ϵ_y, ϵ_z en cada una de las direcciones x, y, z. En general, estas deformaciones unitarias serán distintas entre sí. Consideraremos la deformación unitaria resultante en cada una de las direcciones como la superposición del resultado de las tres tracciones o compresiones simples en cada dirección. Así, tendremos que, para ϵ_x, tomando σ_x, σ_y y σ_z como positivas (si alguna es negativa su signo cambia y por tanto su efecto es el contrario), tendremos alargamiento como consecuencia de σ_x y acortamiento como consecuencia de σ_y y σ_z quedando:

$$\epsilon_{x_x} = \frac{\sigma_x}{E} \quad ; \quad \epsilon_{x_y} = -\nu\frac{\sigma_y}{E} \quad ; \quad \epsilon_{x_z} = -\nu\frac{\sigma_z}{E} \tag{1-7}$$

y análogamente para ϵ_y y ϵ_z. En todas las expresiones se ha utilizado la notación para p. ej ϵ_{y_x} de deformación unitaria en la dirección y originada por la fuerza aplicada en la dirección x. Sumando todos los efectos para las deformaciones unitarias en cada una de las tres direcciones se tiene, para un material isótropo:

$$\begin{aligned} \epsilon_x &= \frac{1}{E}[\sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z)] \\ \epsilon_y &= \frac{1}{E}[\sigma_y - \nu(\sigma_x + \sigma_z)] \\ \epsilon_z &= \frac{1}{E}[\sigma_z - \nu(\sigma_x + \sigma_y)] \end{aligned} \tag{1-8}$$

Calculemos ahora la variación del volumen $V = L_x L_y L_z$. Para ello tomamos logaritmos neperianos $\ln V = \ln L_x + \ln L_y + \ln L_z$ e incrementos, quedando, de este modo, para la variación unitaria de volumen, deformación volumétrica, o deformación cúbica θ:

$$\theta = \frac{\Delta V}{V} = \frac{\Delta L_x}{L_x} + \frac{\Delta L_y}{L_y} + \frac{\Delta L_z}{L_z} = \epsilon_x + \epsilon_y + \epsilon_z \tag{1-9}$$

Sustituyendo las expresiones para ϵ_x, ϵ_y y ϵ_z se tiene:

$$\theta = \frac{\Delta V}{V} = \frac{1-2\nu}{E}(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z) = \epsilon_x + \epsilon_y + \epsilon_z \tag{1-10}$$

Es importante recalcar que este resultado es válido únicamente para deformaciones pequeñas y comportamiento elástico lineal e isótropo.

1.4.5 Casos particulares de deformación en tres dimensiones.

Tensión hidrostática.

En el caso de tensión hidrostática todas las tensiones elásticas son iguales σ_x=σ_y=σ_z (y por tanto ϵ_x=ϵ_y=ϵ_z) y se tiene:

$$\epsilon = \frac{1-2\nu}{E}\sigma \tag{1-11}$$

y la deformación cúbica es:

$$\theta = \frac{\Delta V}{V} = 3\epsilon = \frac{\sigma}{\mathcal{K}} \tag{1-12}$$

donde $\mathcal{K}$ es el módulo de compresibilidad dado por:

$$\mathcal{K} = \frac{E}{3(1-2\nu)} \tag{1-13}$$

que como se ve se conoce una vez se conocen el módulo de Young y el coeficiente de Poisson.

La *energía elástica* por unidad de volumen[2]acumulada en la compresión volumétrica hidrostática será:

$$\mathcal{U} = \frac{3}{2}\epsilon\sigma = \frac{\mathcal{K}\theta^2}{2} = \frac{\sigma^2}{2\mathcal{K}} = \frac{1}{2}\sigma\theta \tag{1-16}$$

$\mathcal{K}$ debe ser positiva (V aumenta en la tracción hidrostática y disminuye en la compresión), porque sino, los cuerpos serían inestables energéticamente. Esto se ve en la expresión de la energía, donde si $\mathcal{K}$ <0 se tendría que $\mathcal{U}$ <0 y por tanto, cuanto mayor fuera la tensión menor sería la energía del cuerpo, el cuerpo tendería a pasar a energía menor indefinidamente, y para ello, se deformaría indefinidamente. Esto implica que:

$$\mathcal{K} > 0 \Rightarrow 1-2\nu > 0 \Rightarrow \nu < \frac{1}{2} \tag{1-17}$$

luego $0 < \nu < \frac{1}{2}$. $\nu = \frac{1}{2}$ implicaría un módulo de compresibilidad $\mathcal{K}$ infinito para un módulo de Young finito, es decir, sería un cuerpo absolutamente incompresible hidrostáticamente.

1.4.6 Compresión unilateral o uniaxial.

Consideraremos un cuerpo limitado por unas paredes suficientemente rígidas, que permanecen fijas de modo que sus dimensiones transversales no varían apreciablemente. Aparecen unas reacciones de las paredes σ_y y σ_z, que impiden la extensión lateral. Las condiciones de invariabilidad de dimensiones en las direcciones y y z serán ϵ_y=ϵ_z=0. De este modo se tiene:

$$\epsilon_y = \frac{\sigma_y - \nu(\sigma_x+\sigma_z)}{E} = \epsilon_z = \frac{\sigma_z - \nu(\sigma_x+\sigma_y)}{E} = 0 \tag{1-18}$$

de donde se tiene $\sigma_y - \nu\sigma_z = \sigma_z - \nu\sigma_y = \nu\sigma_x$, que tiene por única solución $\sigma_y = \sigma_z$. Sustituyendo esta expresión en la ecuación $\sigma_y - \nu\sigma_z = \nu\sigma_x$ que se había obtenido anteriormente, se tiene:

$$\sigma_y = \sigma_z = \frac{\nu}{1-\nu}\sigma_x \tag{1-19}$$

quedando entonces la compresión axial en la forma:

$$\epsilon_x = \frac{\sigma_x - \nu(\sigma_y+\sigma_z)}{E} = \frac{1-\nu-2\nu^2}{E(1-\nu)}\sigma_x \tag{1-20}$$

[2]Ahora, teniendo en cuenta que $\theta = 3\epsilon$ y que $\sigma = \mathcal{K}\theta$ el cálculo de la energía de deformación en cada una de las direcciones es de la forma:

$$\delta W^{1dim} = FdL = \sigma S L_0 d\epsilon = \mathcal{K}\theta V d\epsilon = \frac{1}{3}\mathcal{K}\theta V d\theta = \frac{1}{3}\mathcal{K}\theta V d\left(\frac{\theta^2}{2}\right) \tag{1-14}$$

por lo que la energía total de deformación hidrostática será de tres veces este valor,

$$\delta W^{3dim} = 3 \times \delta W^{1dim} = \mathcal{K}\theta V d\left(\frac{\theta^2}{2}\right) \tag{1-15}$$

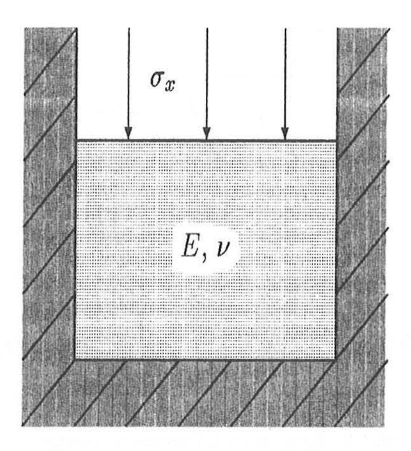


Figura 1-7: Compresión uniaxial aplicada con límites en las paredes. Como consecuencia de la rigidez de las paredes, aparecen fuerzas de reacción en las direcciones y y z (con tensiones σ_y, σ_z).

1.5 Superposición de los efectos elásticos y térmicos.

Es bien sabido que, en general, los cuerpos se dilatan al calentarse. El calentamiento da lugar a una variación de las dimensiones del cuerpo que a menudo debe ser tenida en cuenta en nuestros cálculos. Se ha visto en temas anteriores que, para pequeñas variaciones de tamaño, las longitudes varían en la forma:

$$L = L_0(1 + \alpha_l \Delta T) \tag{1-21}$$

donde α_l es el coeficiente de dilatación lineal.

De forma análoga a como hemos hecho con las deformaciones producidas por fuerzas, podemos definir una deformación unitaria debida únicamente a los efectos térmicos en la forma:

$$\epsilon_{térmica} = \frac{L - L_0}{L_0} = \frac{\Delta L_{térmica}}{L_0} = \alpha_l \Delta T \tag{1-22}$$

Con estas expresiones, la deformación unitaria total queda en la forma:

$$\begin{aligned}
\epsilon_{total_x} &= \epsilon_{elástica_x} + \epsilon_{térmica_x} = \frac{1}{E}[\sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z)] + \alpha_l \Delta T \\
\epsilon_{total_y} &= \epsilon_{elástica_y} + \epsilon_{térmica_y} = \frac{1}{E}[\sigma_y - \nu(\sigma_x + \sigma_z)] + \alpha_l \Delta T \\
\epsilon_{total_z} &= \epsilon_{elástica_z} + \epsilon_{térmica_z} = \frac{1}{E}[\sigma_z - \nu(\sigma_x + \sigma_y)] + \alpha_l \Delta T
\end{aligned} \tag{1-23}$$

donde solamente se ha considerado el caso de materiales isótropos, en los cuales ni α_l ni E dependen de la dirección.

1.6 Deslizamientos o distorsiones.

1.6.1 Concepto de deslizamiento o distorsión. Módulo de rigidez.

Consideraremos ahora deformaciones donde se mantiene el volumen, pero no la forma del cuerpo. La invariancia del volumen implica que:

$$\theta = \frac{\Delta V}{V} = \epsilon_x + \epsilon_y + \epsilon_z = 0 \quad \rightarrow \quad \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z = 0 \tag{1-24}$$

teniéndose entonces:

$$\epsilon_x = \frac{\sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z)}{E} = \frac{1 + \nu}{E}\sigma_x = \frac{1}{2G}\sigma_x = \epsilon_x \tag{1-25}$$

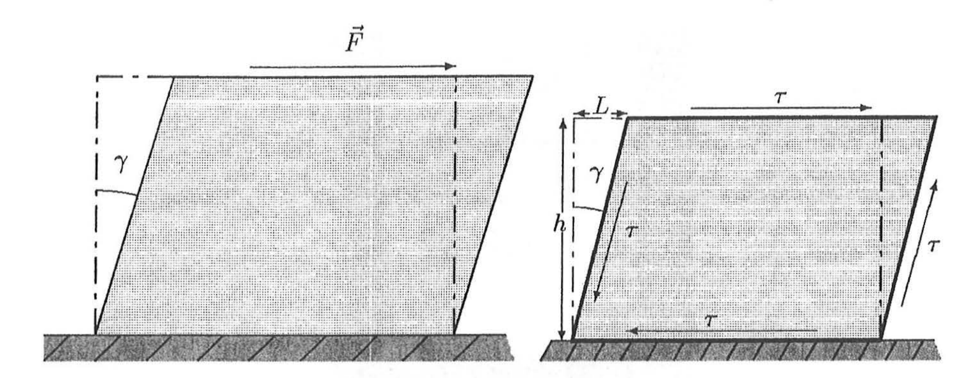


Figura 1-8: Tensiones y deformaciones cortantes

donde se ha definido el módulo de rigidez G como:

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)} \tag{1-26}$$

A estas deformaciones en las que se mantiene constante el volumen se les denomina deslizamientos o distorsiones.

1.6.2 Esfuerzos cortantes (o de cizalladura).

Como consecuencia de la aplicación al cuerpo de fuerzas tangenciales a la superficie (en vez de perpendiculares) el paralelepípedo de la figura se inclina un ángulo γ (ángulo cortante o de deslizamiento).

Como este ángulo γ es pequeño, ya que en todo momento estamos considerando deformaciones muy pequeñas respecto de las dimensiones del cuerpo, se puede hacer la aproximación sen$\gamma \approx \gamma$ (¡¡Con γ medido en radianes únicamente!!). La ley de Hooke que ya conocíamos pasa a ser para el caso de los cortantes:

$$\tau = G\gamma \rightarrow \gamma = \frac{\tau}{G} \tag{1-27}$$

Como el módulo de rigidez debe ser una magnitud positiva, ya que en caso contrario a una tensión de compresión en una dirección (sin ninguna tensión más aplicada) le correspondería un alargamiento en esa dirección, se debe cumplir que $1 + \nu > 0 \Rightarrow \nu > -1$, quedando los límites para el coeficiente de Poisson ν, $-1 \leq \nu \leq \frac{1}{2}$. El caso $\nu = -1$ daría un módulo de rigidez G infinito para un módulo de Young finito, por lo que se tendría en ese caso un cuerpo absolutamente indeformable frente a los cortantes.

Según ésto que hemos visto, podrían existir cuerpos con un valor negativo del coeficiente de Poisson (serían cuerpos en los que hay un ensanchamiento lateral como consecuencia de una tracción simple), pero en la naturaleza no se conocen cuerpos así.

Veamos ahora como se obtiene a partir de la ley de Hooke que ya conocemos (Ec. 1-2) la relación que hemos presentado entre la tensión cortante y el ángulo de deformación. Para ello consideremos un cuerpo en un estado de tensión plano, al que se aplican una tracción en una dirección y una compresión en la otra dirección, ambas de idéntica magnitud (pero de distinto signo) como se indica en la figura. En estas condiciones se tiene que $\sigma_y = -\sigma$ y $\sigma_z = +\sigma$. Las deformaciones ϵ_z y ϵ_y son:

$$\begin{aligned} \epsilon_z &= \frac{1}{E}(\sigma_z - \nu\sigma_y) = \frac{1+\nu}{E}\sigma \\ \epsilon_y &= \frac{1}{E}(\sigma_y - \nu\sigma_z) = -\frac{1+\nu}{E}\sigma \end{aligned} \tag{1-28}$$

Observando el triángulo que se muestra en la figura, y considerando que el sistema está en equilibrio de fuerzas,

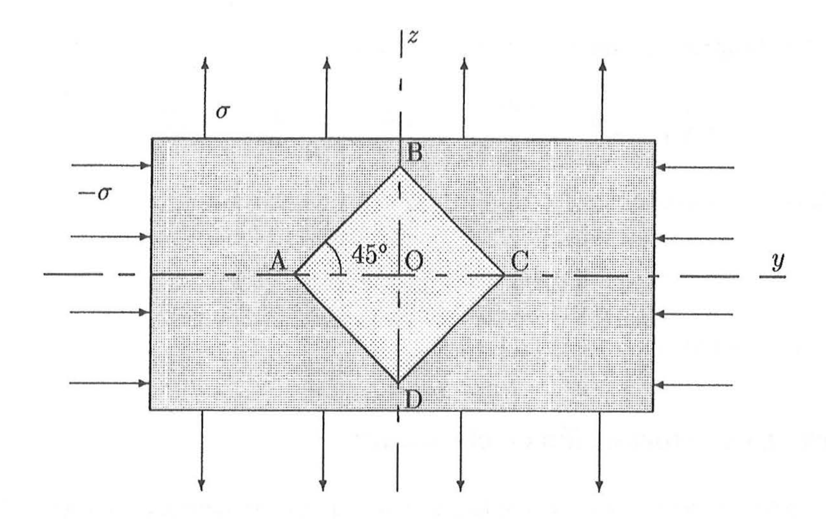


Figura 1-9: Obtención de la Ley de Hooke para los cortantes. Para ello se considerará el estado de tensiones de la figura, donde hay aplicadas en un plano (en la figura el Oyz) tensiones σ_y y σ_z de idéntica magnitud, pero distinto signo, estudiándose como se deforma el cuadrado ABCD rotado 45° respecto de los ejes Ox y Oz.

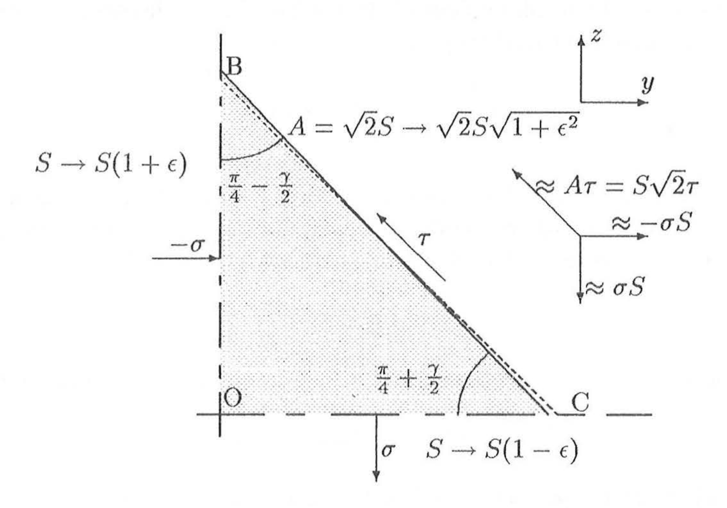


Figura 1-10: Equilibrio de fuerzas en el triángulo de la figura. Como consecuencia de las tensiones aplicadas, la distancia OB aumenta y la distancia OC disminuye, variando asimismo los ángulos de 45° originales.

tenemos[3] que aproximadamente $\tau = \frac{1}{2}(\sigma_z - \sigma_y) = \sigma$. Considerando las relaciones trigonométricas que se satisfacen en ese triángulo, se tiene que:

$$\frac{\bar{OC}}{\bar{OB}} = \frac{1+\epsilon_y}{1+\epsilon_z} = \tan\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\gamma}{2}\right) \tag{1-29}$$

[3]Esta relación, que se ha presentado como aproximada, es en realidad exacta. Para ello, consideremos rigurosamente el equilibrio de las fuerzas que actúan sobre el triángulo. Como la magnitud de ambas tensiones es la misma, pero su signo distinto, no hay deformación en la dirección z. Por ello trabajaremos con fuerzas por unidad de profundidad, obteniéndose para el cuadrado del módulo de la fuerza sobre la cara BC, el resultado

$$\tau^2\left[(1-\epsilon)^2 + (1+\epsilon)^2\right] = \sigma^2(1-\epsilon)^2 + \sigma^2(1+\epsilon)^2 = \sigma^2\left[(1-\epsilon)^2 + (1+\epsilon)^2\right]$$

que da directamente $\sigma = \tau$. Para obtener esta expresión se ha tenido en cuenta que, en el triángulo rectángulo OBC, el cuadrado del lado BC es

$$\bar{BC}^2 = (1-\epsilon)^2 + (1+\epsilon)^2$$

De este modo, y haciendo la aproximación tan(γ/2)$\approx$ γ/2 se tiene:

$$\tan\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\gamma}{2}\right)=\frac{\tan\frac{\pi}{4}-\tan\frac{\gamma}{2}}{1+\tan\frac{\pi}{4}\tan\frac{\gamma}{2}}=\frac{1-\frac{\gamma}{2}}{1+\frac{\gamma}{2}}=\frac{1+\epsilon_y}{1+\epsilon_z} \tag{1-30}$$

quedando al comparar las dos expresiones:

$$\gamma=2\epsilon_z=-2\epsilon_y=\frac{2(1+\nu)}{E}\sigma=\frac{2(1+\nu)}{E}\tau \tag{1-31}$$

que se convierte en $\tau=G\gamma$ si definimos $G=E/[2(1+\nu)]$.

1.6.3 Energía elástica de deformación en el cortante.

Hemos visto que cuando se aplica una fuerza cortante a un material, éste se deforma. Si estamos dentro del límite elástico, al desaparecer la fuerza que produce la deformación, el material recupera sus dimensiones originales. Podemos decir que, análogamente al caso de un muelle que se estira, el material almacena al deformarse una energía elástica que empleará posteriormente en recuperar su forma inicial en el caso de que la fuerza cortante haya desaparecido. Calculemos esta energía elástica. El desplazamiento L de una base frente a la otra en función de la tangente del ángulo cortante y de la altura h del prisma viene dada por:

$$\tan\gamma=\frac{L}{h}\quad\rightarrow\quad L=h\tan\gamma \tag{1-32}$$

Como nos restringimos al caso de pequeñas deformaciones, podremos hacer la aproximación $\tan\gamma\simeq\gamma$ (con γ medida en radianes), quedando la expresión anterior como $L\simeq hd\gamma$. Así, la relación entre una variación infinitesimal dL de la distancia L y una variación infinitesimal $d\gamma$ del ángulo cortante γ viene dada por:

$$dL\simeq hd\gamma \tag{1-33}$$

De este modo, el trabajo elemental δW realizado por una fuerza F al desplazar la superficie superior en dL es:

$$\delta W=FdL=Fhd\gamma=\tau Shd\gamma=VG\gamma d\gamma \tag{1-34}$$

que al integrar da, para el trabajo realizado por la fuerza F al deformar el sólido un ángulo γ

$$W=\frac{1}{2}VG\gamma^2 \tag{1-35}$$

Por tanto, la energía elástica almacenada por unidad de volumen en el material durante una deformación cortante es:

$$\mathcal{U}=\frac{1}{2}G\gamma^2=\frac{\tau^2}{2G}=\frac{1}{2}\tau\gamma \tag{1-36}$$

Una consecuencia inmediata de esta expresión es que G debe ser una magnitud positiva, ya que si fuera negativa se tendría una inestabilidad energética. Si fuera negativo, al aplicar una tensión cortante de cualquier signo, $\mathcal{U}$ sería negativa, y además, tanto más negativa cuanto mayor fuera τ, es decir, el material estaría más cómodo energéticamente cuanto más deformado estuviera. Esto se ve también en la expresión $\tau=G\gamma$. Por tanto, $G>0$ y entonces, como $G=E/[2(1+\nu)]$ se tiene que:

$$1+\nu>0\quad\Rightarrow\quad\nu>-1 \tag{1-37}$$

luego los límites teóricos para el coeficiente de Poisson son:

$$-1<\nu<\frac{1}{2} \tag{1-38}$$

aunque en la realidad, como ya se ha dicho, no se conozca ningún material con $\nu<0$.

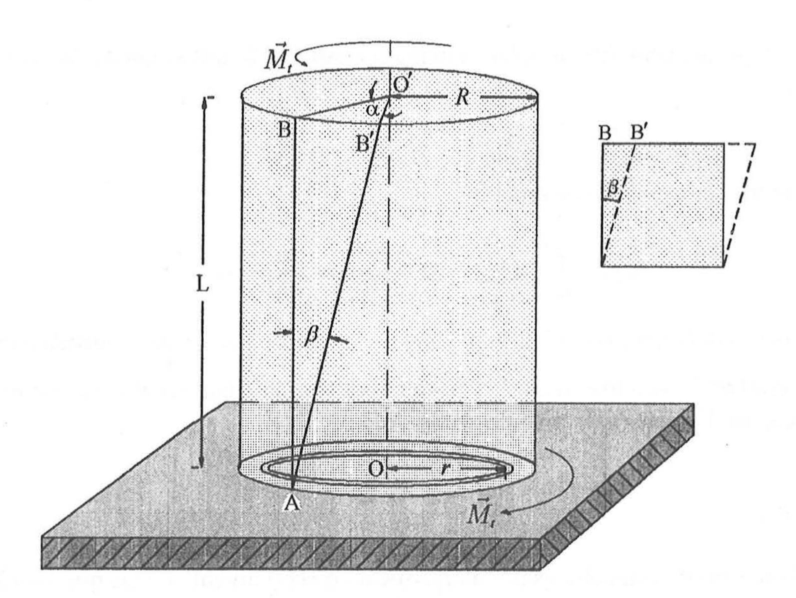


Figura 1-11: Torsión de una barra cilíndrica. En la figura se representa una barra cilíndrica que es torsionada bajo la acción de dos pares de fuerzas que actúan en cada una de las bases, cada uno de ellos dando momentos M_t iguales y opuestos dirigidos a lo largo del eje del cilindro.

1.7 Deformaciones inhomogéneas.

Hasta ahora hemos estudiado solamente los casos en que todos los elementos del cuerpo objeto de estudio están sometidos al mismo estado de tensiones. Sin embargo, en muchas ocasiones distintos elementos del cuerpo están sometidos a distintos estados de tensiones y por tanto tienen distintas deformaciones. En estos casos, se dice que tenemos deformaciones inhomogéneas. El estudio general de las deformaciones inhomogéneas es habitualmente difícil, pero hay dos casos de deformaciones inhomogéneas simples de gran importancia, la flexión y la torsión.

1.7.1 Esfuerzos de torsión.

Estudiaremos ahora un caso de deslizamiento puro, pero no homogéneo, el de una barra que tiene uno de sus extremos fijo a un soporte, retorciéndose el otro extremo. Así, la barra entera se retuerce, pero las distintas secciones de la barra giran un ángulo distinto respecto de la base fija, dependiendo de la distancia a que se encuentren de ésta.

Se tiene el cilindro que se muestra en la figura, de radio R y longitud L. Como consecuencia de la deformación, cada una de las generatrices AB se transforma en una línea inclinada AB'. Para un tubo imaginario de espesor despreciable en la superficie lateral exterior del cilindro, se cumple:

$$\overline{BB}' = R\alpha \to \beta \approx \tan\beta \approx \frac{\overline{BB}'}{L} = \frac{R\alpha}{L} \approx \frac{\overline{BB}'}{AB} \tag{1-39}$$

aproximación que es válida sólo cuando estamos trabajando en radianes. Si consideramos ahora una superficie cilíndrica de radio r ($< R$), es decir, en el interior del cilindro, se tendrá que sus elementos de volumen estarán deformados un ángulo cortante $\beta_r = r\alpha/L$, menor que el ángulo β que corresponde a los elementos en la superficie del cilindro. De este modo, distintos elementos de la barra cilíndrica sufren deslizamientos diferentes, menores cuanto más próximo al eje está el elemento. Para un tubo de radio r y espesor dr interior al cilindro, aproximamos por un plano. La fuerza que actúa sobre un elemento de superficie horizontal (en el dibujo) de ese tubo diferencial, a una distancia r del eje, de espesor dr y ángulo comprendido $d\theta$ es:

$$dF(r,\theta) = \tau dS = G\beta_r dS = G\beta_r r dr d\theta \tag{1-40}$$

El momento respecto del eje OO' será, para este elemento diferencial:

$$dM_t(r,\theta) = r dF(r,\theta) = G\beta_r r^2 dr d\theta = \frac{G\alpha}{L} r^3 dr d\theta \tag{1-41}$$

El momento de las fuerzas que actúan sobre la corona circular de espesor dr que se encuentra a una distancia r del eje del cilindro es entonces:

$$dM_t(r) = \int_0^{2\pi} dM_t(r,\theta) = \frac{2\pi G\alpha}{L} r^3 dr \quad (1\text{-}42)$$

quedando para todo el cilindro el momento de torsión:

$$M_t = \int_0^R dM_t = \pi G \frac{\alpha}{L} \frac{R^4}{2} = \frac{\pi}{32} \frac{D^4}{L} G\alpha \quad (1\text{-}43)$$

donde $D = 2R$ es el diámetro del cilindro y M_t el momento de torsión de las fuerzas aplicadas sobre la base de éste.

Un cilindro de un material dado será más fácil de deformar por torsión cuanto mayor sea su longitud, y tanto más difícil cuanto mayores sean su diámetro y su módulo de rigidez.

1.7.2 Flexión plana.

Hasta el momento se han visto deformaciones por alargamiento o acortamiento en las que los elementos del sólido paralelos a las fuerzas que actúan conservan su dirección. En el caso de la **flexión** la deformación da lugar a una curvatura bajo la acción de un par de fuerzas (es decir, de un momento).

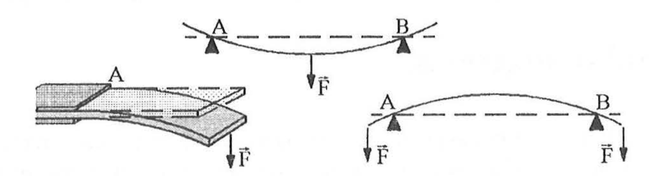


Figura 1-12: Flexión plana. Se produce cuando la deformación por flexión tiene lugar manteniendo un plano de simetría, en el caso de la figura, el plano vertical que pasa por el centro de la pieza.

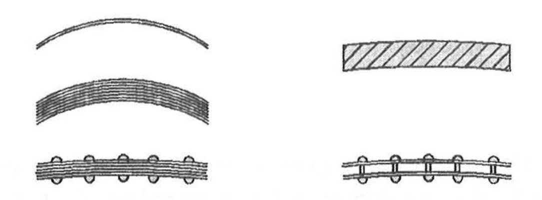


Figura 1-13: La facilidad de deformar por flexión un elemento de un material depende de la forma del mismo. Según sea la pieza concreta a deformar será más fácil o más difícil hacerlo. Por ejemplo, será mucho más fácil deformar por flexión un conjunto de láminas apiladas que ese mismo conjunto de láminas que estén además remachadas.

Consideremos una barra homogénea horizontal (con un plano de simetría vertical π, sometida a una serie de fuerzas (peso, reacciones de los apoyos, etc...) simétricas respecto de ese plano. Como consecuencia de éstas, cada fibra de la barra se deforma, pero el plano vertical π de simetría se sigue manteniendo. En estas condiciones estamos ante un caso de **flexión plana**, como los que se muestran en la figura 1-12. Se denomina flecha al desplazamiento vertical máximo que sufre la barra.

Esta flexión plana lleva aparejadas deformaciones por alargamiento y acortamiento y dependiendo de como sean éstas de importantes, será más o menos fácil deformar la barra. Si consideramos el caso de una lámina muy fina, ésta se deformará con facilidad, ya que la variación de longitud en los extremos superior o inferior de la misma es pequeña. Si consideramos el caso de una conjunto de láminas apiladas, pero no unidas entre sí, como un taco de hojas de papel, la deformación será algo más difícil, pero no mucho más, ya que la variación de longitud de cada hoja individual sigue siendo pequeña, y una hoja desliza sobre la otra. Sólo el rozamiento entre las hojas dificulta un poco la flexión. En cambio, si las láminas de esta pila están grapadas entre sí, ya no deslizan unas sobre otras al producirse la deformación, y las hojas más externas por fuera sufren una fuerte tracción que intenta alargarlas, mientras que las hojas más externas por dentro sufren una fuerte compresión que intenta acortarlas. El resultado de todo esto es que resulta mucho más

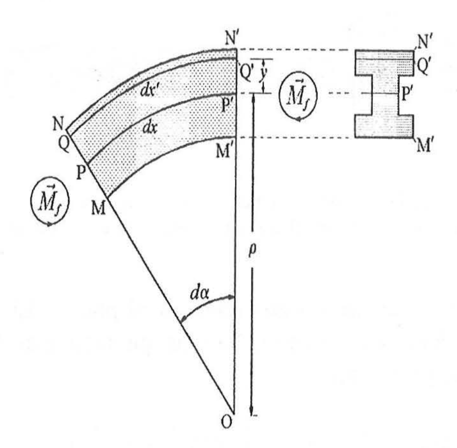


Figura 1-14: Estudio analítico del momento flector. Para estudiar analíticamente el momento flector y su relación con el ángulo que ha flectado el elemento consideramos un corte del mismo de espesor infinitesimal, como se muestra en la figura. La fibra neutra está representada por la línea PP′ y en las caras del elemento en contacto con el resto de la pieza actúa un momento flector M_f.

difícil deformar el taco de hojas ahora que antes, ya que ahora las variaciones de longitud de las hojas son mucho más importantes. Análogamente ocurriría para el caso de dos planchas separadas entre sí, pero remachadas, ya que los remaches impiden que deslicen las planchas una respecto de la otra.

Una visión parecida es la que utilizaremos para abordar el problema. Consideraremos la pieza de material elástico a estudiar como compuesta imaginariamente de una serie de fibras longitudinales. Aunque las distintas fibras se mueven solidariamente, las que se encuentran hacia la concavidad están comprimidas, mientras que las que se encuentran hacia la convexidad se encuentran traccionadas, y sólo las fibras que se encuentran a una determinada altura no se deforman y mantienen su longitud. A cada una de estas fibras se le denomina fibra neutra. Todas las fibras que se encuentran situadas más hacia la convexidad se alargan, mientras que las fibras que se encuentran hacia la concavidad se acortan. Esta fibra neutra se encuentra situada a la altura del centro de gravedad de la sección plana de la barra.

Estudio analítico del momento flector.

Estudiemos ahora el problema analíticamente, observando cuál es el efecto de la flexión sobre una sección de la barra. El corte de la figura corresponde al plano de simetría vertical π. En la figura, MN y M′N′ son las proyecciones sobre π de dos secciones de la barra, a distancias x y $x + dx$ de la sección recta original, O es el centro de curvatura del arco de fibra neutra PP′, ρ es el radio de curvatura y dα el ángulo POP′.

Consideremos una fibra cualquiera, a una distancia $\rho + y$ de O. El ángulo dα será, para ρ y $\rho + y$:

$$d\alpha = \frac{dx}{\rho} \qquad d\alpha = \frac{dx'}{\rho + y} \tag{1-44}$$

quedando la variación de longitud de la fibra:

$$dx - dx' = (\rho + y)d\alpha - \rho d\alpha = y d\alpha \tag{1-45}$$

y por tanto la deformación unitaria es, para la fibra a una distancia $\rho + y$ de la fibra neutra:

$$\epsilon' = \frac{dx' - dx}{dx} = y\frac{d\alpha}{dx} = \frac{y}{\rho} \tag{1-46}$$

Aplicando la Ley de Hooke,

$$\sigma = E\epsilon = E\frac{y}{\rho}$$

se tiene que sobre esta fibra actuará una fuerza:

$$dF = E\frac{y}{\rho}dS \tag{1-47}$$

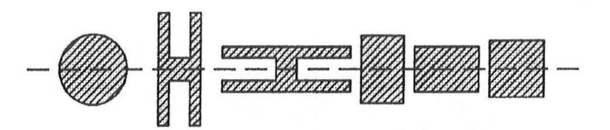


Figura 1-15: Distintas formas para un mismo área de la sección de la barra. A pesar de que en todos los casos la sección el área es la misma, los momentos de inercia de la sección plana son distintos y, por tanto, el comportamiento frente a la flexión.

donde dS es un elemento de superficie de la fibra, perpendicular al plano. El momento, tomado respecto del eje horizontal que pasa por la fibra neutra, del conjunto de las fuerzas que actúan en MN y M′N′ y originan la flexión es el momento flector en esa sección plana, y tiene un valor:

$$M_f = \int_S ydF = \int_S E\frac{y^2}{\rho}dS = \frac{E}{\rho}I_{zz} \tag{1-48}$$

donde I_{zz} es el momento de inercia de la sección plana respecto del eje z que pasa por la fibra neutra:

$$I_{zz} = \int_S y^2 dS \tag{1-49}$$

Este momento de inercia depende de la forma y dimensiones de la sección de la barra, pudiendo tener piezas cuya sección tiene el mismo valor, pero distinta forma, como las que se muestran en la figura 1-15, resistencias muy distintas frente a la flexión. En cualquier caso, el centro de gravedad de cada sección está situado sobre la fibra neutra.

Flexión en vigas que flectan por su propio peso.

Momentos flectores y fuerzas cortantes. Veamos ahora algunos ejemplos de cálculos de momentos flectores M_f en vigas.

Viga biapoyada somedida a su peso. Consideremos en primer lugar el caso de una viga biapoyada, con una masa total M y una longitud L, como la que se muestra en la figura 1-16. Consideremos una sección imaginaria de la misma a una distancia l del apoyo izquierdo 1, y a una distancia x del apoyo derecho 2. Si consideramos el elemento de volumen a la izquierda de la sección (entre esta sección y el apoyo 1), cuya masa es $m = Ml/L$, el equilibrio de fuerzas nos da que

$$F_1 = mg + T$$

lo que nos permite obtener la fuerza cortante T:

$$T = F_1 - mg \tag{1-50}$$

Por otra parte, si tomamos momentos respecto del punto de aplicación de T, para que haya equilibrio frente a la rotación deberá cumplirse:

$$M_f = lF_1 - \frac{l}{2}mg \tag{1-51}$$

donde la fuerza F_1 sobre el apoyo 1 es la mitad $\frac{1}{2}Mg$ del peso total de la viga. Por otra parte, hemos visto (Ec. 1-48) que se cumplía:

$$M_f = \frac{E}{\rho}I_{zz}$$

con I_{zz} el momento de inercia de la sección de la viga y ρ el radio de curvatura. Este está relacionado con la deformación ϵ mediante (Véase la ecuación 1-46)

$$\rho = \frac{y}{\epsilon}$$

donde y es la distancia en la sección respecto de la fibra neutra en el plano de simetría de la deformación. La

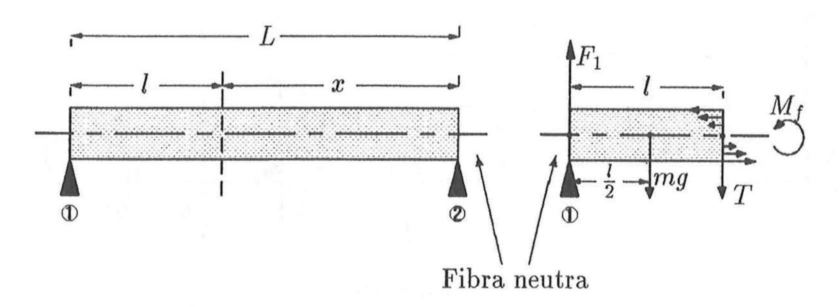


Figura 1-16: Momento flector en una viga biapoyada que pesa. Tomamos la parte de la viga entre el apoyo izquierdo y la sección situada a una distancia l del apoyo izquierdo o a una distancia x del apoyo derecho, y sustituimos la acción del material fuera de este volumen por el sistema de fuerzas equivalente en cada caso.

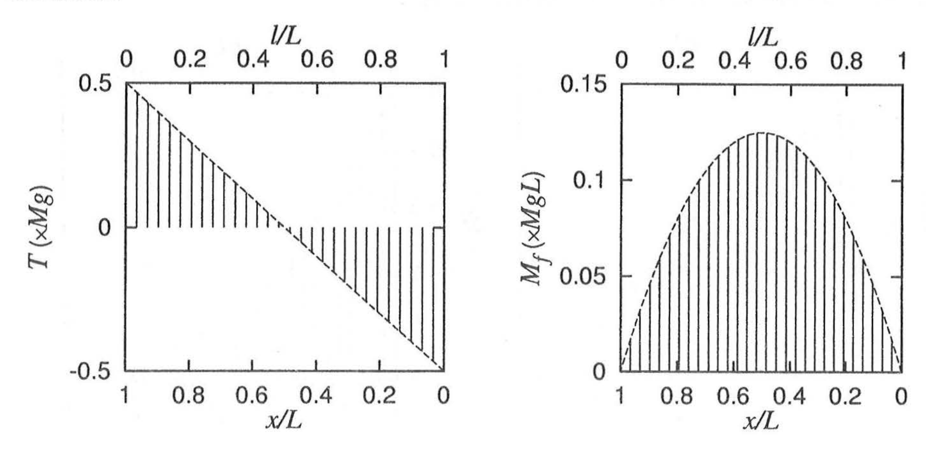


Figura 1-17: Diagramas de la fuerza cortante T y el momento flector M_f para una viga biapoyada sometida únicamente a su propio peso, en función de la distancia l al apoyo izquierdo o de la distancia x al apoyo derecho.

ecuación 1-51 queda entonces

$$M_f = \frac{1}{2}\frac{Mg}{L}l(L-l) = \frac{1}{2}\frac{Mg}{L}(L-x)x = \frac{E\epsilon}{y}I_{zz} = \frac{\sigma}{y}I_{zz} \qquad (1\text{-}52)$$

lo que nos permite escribir la deformación en función de la distancia l al apoyo y de la distancia y a la fibra neutra y obtener, a través de la ley de Hooke $\sigma = E\epsilon$ la expresión de las tensiones normales en función de y y de l (o de y y de x). Este momento flector tiene una dependencia parabólica en l y es nulo en los apoyos y máximo en el centro.

La fuerza cortante sería

$$T = g\left(\frac{M}{2} - m\right) = \frac{Mg}{L}\left(\frac{L}{2} - l\right) = \frac{Mg}{L}\left(x - \frac{L}{2}\right) \qquad (1\text{-}53)$$

Viga empotrada sometida a su peso. Si en vez de ser biapoyada, esa misma viga estuviera empotrada en 1 (Fig. 1-18) la fuerza F_1 de reacción del apoyo sería Mg, y el momento flector en éste $M_{f_1} = \frac{1}{2}LMg$. Tomando momentos respecto del mismo punto que antes tendríamos

$$M_{f_1} + \frac{l}{2}mg = M_f + lMg$$

Si agrupamos términos y sustituimos el valor de m esta ecuación queda:

$$M_f = \frac{Mg}{2L}\left[L^2 + l^2 - 2Ll\right] = \frac{Mg}{2L}(L-l)^2 = \frac{Mg}{2L}x^2 \qquad (1\text{-}54)$$

En este caso habría resultado más sencillo tomar el elemento de volumen en la parte exterior, pero el resultado es

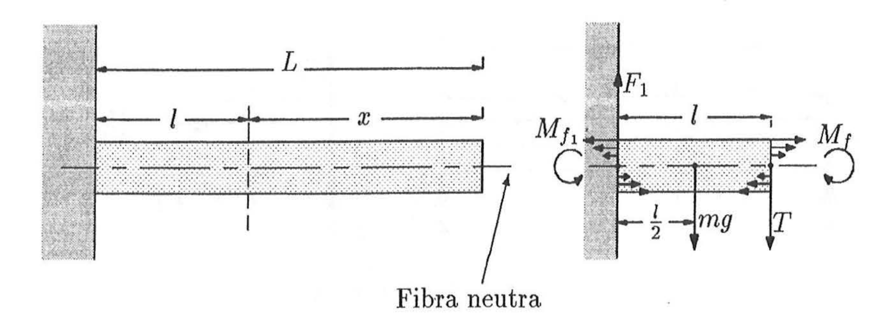


Figura 1-18: Fuerza cortante y momento flector en una viga empotrada en uno de sus extremos. Para su estudio consideraremos el elemento comprendido entre el empotramiento y una sección que se encuentra a una distancia l del empotramiento y a una distancia x del extremo derecho, sustituyéndose la acción del resto del material por el sistema de fuerzas equivalente.

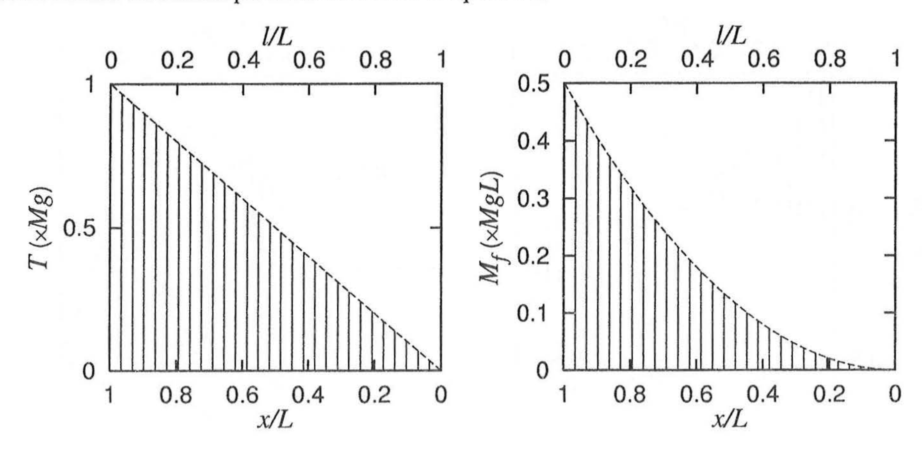


Figura 1-19: Diagramas de fuerzas cortantes T y de momentos flectores M_f para una viga empotrada en uno de sus extremos en función de la distancia l al empotramiento y de la distancia x al extremo libre.

el mismo. Análogamente al caso anterior, de aquí se obtendría la deformación normal en cada punto de la viga y, a través de la ley de Hooke, la tensión normal en ese punto. La fuerza cortante es $T = F_1 - mg = Mg - mg$, que sustituyendo el valor de m queda:

$$T = Mg\left(1 - \frac{l}{L}\right) = \frac{Mg}{L}x \tag{1-55}$$

Vigas sometidas a cargas distribuidas. Si además de su peso hubiera una carga distribuida sobre la viga habría que sustituir Mg/L por la carga total por unidad de longitud en la viga, donde ya estarían incluidos tanto el peso como la carga extra. Si en vez de carga distribuida, o además de ella, hubiera cargas puntuales en ciertas posiciones, habría que incluirlas en las expresiones de los momentos y de las fuerzas cortantes, en un proceso similar al anterior, obteniéndose una serie de expresiones válidas cada una de ellas en un cierto rango. En este caso sería necesario rehacer todos los cálculos en los distintos rangos entre las distintas cargas puntuales.

Tensiones cortantes. La tensión cortante en una sección de una viga flexionada no es simplemente el cociente entre las fuerzas cortantes dadas por las ecuaciones 1-53 o 1-55 y la sección de la viga, sino que viene dada por una distribución de tensiones cortantes cuyo valor es cero en la superficie exterior. Para ver esto, consideremos un pequeño elemento de volumen como el que se muestra en la figura 1-20a. Para que haya equilibrio frente a la rotación, si hay tensiones cortantes en las caras verticales, deberá haberlas también en las horizontales, de forma que sus momentos se compensen. En concreto, si este elemento de volumen se toma con un lado en la superficie externa, debiera haber una fuerza cortante en ésta, pero no hay fuerzas actuando sobre esa superficie, por lo que a la altura de la superficie externa tampoco habrá fuerzas cortantes en la cara vertical.

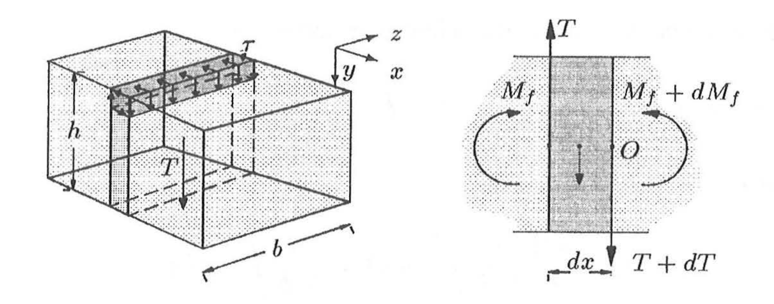


Figura 1-20: Tensiones cortantes en vigas flexionadas.

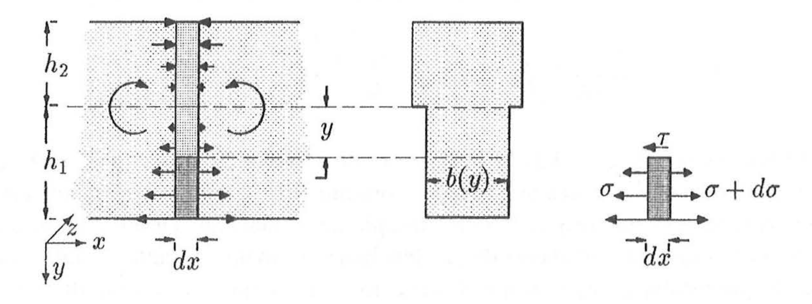


Figura 1-21: Cálculo de las tensiones cortantes en vigas flexionadas.

Antes de obtener cómo es la distribución de tensiones cortantes en la sección, obtendremos algunas relaciones importantes previas. Para ello, estudiaremos el equilibrio de fuerzas en un elemento de volumen de la viga que se encuentra en una zona de carga distribuida entre dos cargas puntuales (es decir, que no se encuentra en un punto en el que la carga cambia bruscamente), como la que se muestra en la figura 1-20b. Este elemento de volumen tiene una anchura dx y el momento flector y la fuerza cortante varían en dM_f y dT respectivamente entre uno y otro extremo. Sobre este elemento actúa una carga distribuida p por unidad de longitud (si solamente es su peso, $p = gdm/dx$) que consideramos aplicada en el centro del elemento de volumen. El equilibrio de momentos respecto del punto O da

$$M_f + dM_f + \frac{dx}{2}pdx = M_f + Tdx \qquad dM_f - Tdx = \frac{1}{2}p(dx)^2$$

y despreciando el infinitésimo de segundo orden de la parte derecha, se tiene la relación

$$T = \frac{dM_f}{dx} \tag{1-56}$$

que muestra claramente que la presencia o no de una fuerza cortante está relacionada con la uniformidad del momento flector a lo largo del eje x.

Pasemos ahora al cálculo de la distribución de tensiones cortantes. Para ello consideremos el elemento de volumen que se presenta en la figura 1-21, de anchura dx y con caras horizontales una en la parte externa y otra en la parte interna a una distancia y de la fibra neutra, y dentro de éste, la parte situada por debajo de la fibra a una distancia y de la fibra neutra. Sobre esta cara interna actuará una tensión cortante τ.[4]Las fuerza normales que actúan sobre las caras izquierda y derecha del elemento son, respectivamente:

$$F_\sigma = \int_y^{h_1} \sigma dA = \int_y^{h_1} \frac{yM_f}{I_{zz}} dA$$

$$F_{\sigma+d\sigma} = \int_y^{h_1} (\sigma + d\sigma) dA = \int_y^{h_1} \frac{y(M_f + dM_f)}{I_{zz}} dA$$

[4]Nótese que esta tensión τ está medida a una distancia finita $h_1 - y$ de la superficie externa inferior y por tanto no tiene por que ser cero, al contrario de lo que ocurría en el elemento de volumen infinitesimal de la figura 1-20.

La condición de equilibrio de fuerzas da entonces, en la dirección horizontal:

$$\tau b dx = \int_y^{h_1} \frac{y(M_f + dM_f)}{I_{zz}} dA - \int_y^{h_1} \frac{yM_f}{I_{zz}} dA = \int_y^{h_1} \frac{ydM_f}{I_{zz}} dA$$

de donde la distribución de tensiones cortantes queda

$$\tau(l,y) = \frac{dM}{dx}\frac{1}{I_{zz}b}\int_y^{h_1} ydA = \frac{T(l)}{I_{zz}b}\int_y^{h_1} ydA \tag{1-57}$$

Para el caso concreto de una viga de sección rectangular de anchura b y altura h el momento de inercia de la sección plana es $I_{zz} = bh^3/12$, las alturas h_1 y h_2 son $h/2$ y la distribución de tensiones cortantes queda

$$\tau(l,y) = \frac{12T(l)}{b^2h^3}\int_y^{h_1} ybdy = \frac{6T(l)}{bh^3}\left[\left(\frac{h}{2}\right)^2 - y^2\right] \tag{1-58}$$

que es una parábola que se hace cero para $y = \pm\frac{1}{2}h$ y tiene un valor máximo $3T/(2bh)$ para $y = 0$. En la expresión anterior está incluida la dependencia en l a través de la fuerza cortante $T(l)$. La consecuencia de esta distribución de tensiones cortantes es que las secciones que originalmente eran planas se alabean. Desde un punto de vista riguroso esto hace que el estudio analítico que hemos hecho de las tensiones normales durante la deformación por flexión plana deje de ser válido, ya que estaba basado en que las secciones se mantenían planas durante la deformación. Afortunadamente, el efecto de tener en cuenta este alabeo en el cálculo de las tensiones normales es muy pequeño y por tanto, aunque las secciones realmente se alabeen, se realizan los cálculos de las tensiones normales como si estas superficies se mantuvieran planas durante la deformación.

En un estudio completamente riguroso del problema, es necesario además tener en cuenta las tensiones normales que aparecen en la dirección vertical, debidas al peso de la viga o a la carga que actúa sobre la misma.

2 El tensor de tensiones

2.1 Introducción

Se ha visto en el primer tema un estudio fenomenológico macroscópico del comportamiento de un material deformable isótropo frente a la aplicación de una fuerza. Para ello se ha definido la tensión elástica como una fuerza macroscópica por unidad de superficie y la deformación elástica como la variación relativa de la longitud, de forma también macroscópica.

Sin embargo, con frecuencia, las magnitudes macroscópicas anteriormente definidas no reflejan fielmente la situación que tiene lugar en la escala microscópica. Habitualmente, la tensión o fuerza por unidad de superficie depende del punto concreto en el que se estudia, ya que la mayor parte de los estados de tensiones reales son inhomogéneos. Por tanto, para describir como es el estado de tensiones en un punto del material, es necesario estudiar un pequeño elemento diferencial de volumen del cuerpo alrededor del punto objeto de estudio. Si se toma este elemento de volumen como un prisma con las diversas caras perpendiculares a los ejes coordenados, las fuerzas que actúan sobre estas caras nos darán información acerca de como es el estado de tensiones alrededor de ese punto. Veremos asimismo en este tema que las componentes de estas fuerzas por unidad de superficie ordenadas de cierta forma se transforman como las componentes de un tensor de segundo orden, con las consecuencias que ésto implica.

2.2 Concepto de tensión. Componentes de la tensión.

Cuando una fuerza externa actúa sobre un cuerpo deformable, todos los elementos de volumen del cuerpo sufren la acción de esa fuerza. Se dice que el cuerpo está en un **estado de tensión**. Sobre este cuerpo pueden actuar dos tipos de fuerzas:

Fuerzas de masa: Son aquéllas que actúan sobre todos los elementos del cuerpo, y cuya magnitud es proporcional al volumen del elemento. En elasticidad, la fuerza de masa que aparece típicamente es la fuerza gravitatoria.

Fuerzas de superficie: Son aquéllas que son proporcionales al área de la superficie sobre la que se aplican, como por ejemplo, la fuerza ejercida por un líquido sobre una pared sólida. En elasticidad llamaremos **tensión** o intensidad de la fuerza a la fuerza por unidad de superficie en un punto a través de la superficie

En estos temas denominaremos τ_{ij} a la tensión en la dirección i ejercida a través de la cara j por el material de fuera del cubo sobre el material de dentro del mismo. Cuando se trate de tensiones normales (tensiones perpendiculares a la cara sobre la que se aplican, o sea, $i = j$), las denominaremos indistintamente σ_{ii} o τ_{ii}.

2.3 Ecuaciones de equilibrio

Se tiene un estado de tensiones homogéneo cuando la tensión en una dirección dada es independiente del punto del material. Para **tensiones homogéneas**, en el equilibrio mecánico y en ausencia de fuerzas de masa, se tienen los siguientes resultados:

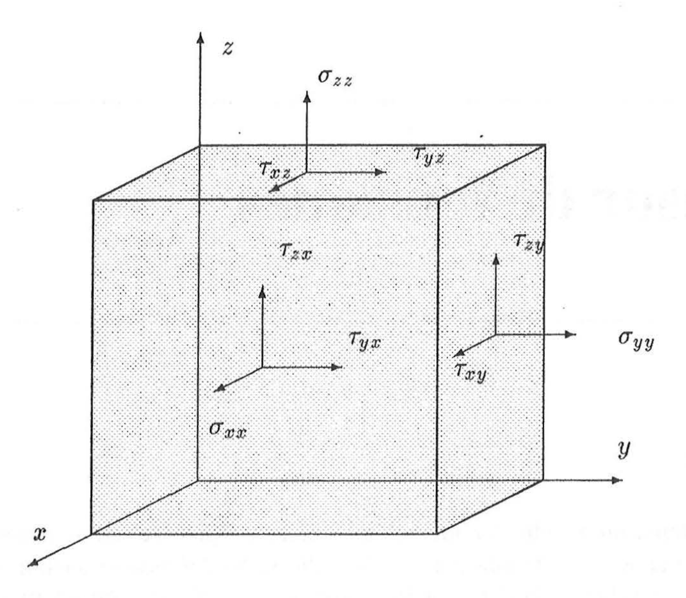


Figura 2-1: Componentes de la tensión a través de las distintas caras de un elemento prismático con aristas según los ejes coordenados. La tensión a través de cada cara se descompone en componentes según los ejes coordenados, con el sentido positivo de las componentes el mostrado en la figura (para las caras opuestas el sentido positivo es el opuesto). Esto da unas componentes σ_{ii} normales a cada cara y unas componentes τ_{ij} tangentes a cada cara (cortantes).

Equilibrio de fuerzas: La tensión en una cara es de idéntica magnitud y de sentido contrario a la tensión correspondiente en la cara opuesta. Así, σ_{xx} es idéntica en la cara representada en la figura y en la opuesta, aunque con signos distintos. A la hora de hablar de tensiones elásticas a este sistema de dos fuerzas se le da un signo positivo si es de tracción y negativo si es de compresión.

Equilibrio de momentos: Del mismo modo que antes, una τ_{ij} es la misma en la cara representada en la figura y en la contraria. Sin embargo, aunque las tensiones τ_{ij} sobre una cara y sobre la opuesta dan una fuerza resultante cero, el momento debido a este par de fuerzas no es nulo. Para que haya equilibrio de momentos, es necesario que se cumpla la condición $\tau_{ij} = \tau_{ji}$, es decir el momento de un par de fuerzas debe estar compensado por el momento de las otras dos fuerzas.

Cuando la tensión en una dirección es distinta en puntos distintos, estamos en el caso de tensiones inhomogéneas. En este caso más general de **tensiones inhomogéneas**, es necesario utilizar un elemento de volumen diferencial como el que se muestra en la figura para estudiar el **equilibrio traslacional**. En la dirección x la fuerza cortante total sobre la cara y, δF_{xy}, es:

$$\begin{aligned} \delta F_{xy} &= -\left(\tau_{xy}(0) - \frac{1}{2}\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y}\delta y\right)\delta z\delta x + \left(\tau_{xy}(0) + \frac{1}{2}\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y}\delta y\right)\delta z\delta x = \\ &= \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y}\delta x\delta y\delta z \end{aligned} \tag{2-1}$$

y análogamente para la fuerza cortante δF_{xz}:

$$\delta F_{xz} = \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z}\delta x\delta y\delta z \tag{2-2}$$

y para la fuerza normal δF_{xx}:

$$\delta F_{xx} = \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x}\delta x\delta y\delta z \tag{2-3}$$

quedando, para la fuerza total por unidad de volumen en la dirección x, una vez sumados los efectos de las fuerzas cortantes y normales, y añadida una contribución debida a las posibles fuerzas de masa, la ecuación de movimiento:

$$\frac{\delta F_x}{\delta V} = \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} + \rho g_x = \rho\frac{d^2x}{dt^2} \tag{2-4}$$

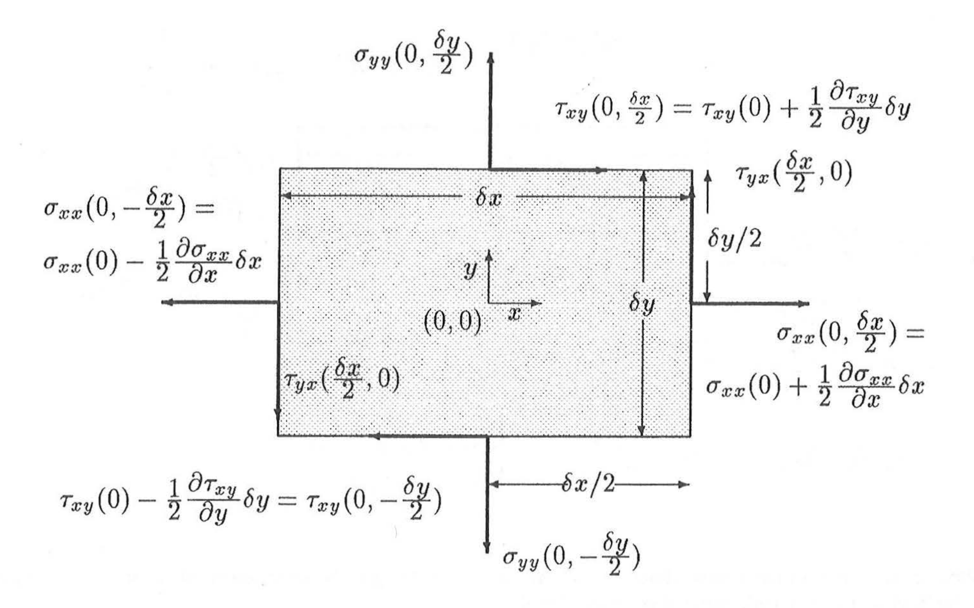


Figura 2-2: Equilibrio de fuerzas para tensiones inhomogéneas en un elemento de volumen prismático diferencial con aristas orientadas según los ejes coordenados. En este caso, el estado tensional varía de un punto a otro. Como las dimensiones del elemento de volumen son infinitesimales, se desarrolla la tensión en torno al valor en el centro del elemento.

y análogamente en las direcciones y y z, donde g_x es la componente de la aceleración debida a fuerzas de masa y d^2x/dt^2 la componente x de la aceleración con que se mueve el cuerpo considerado. Como hay equilibrio mecánico, no hay aceleración y $\partial^2\vec{r}/\partial t^2 = 0$, y se tienen las ecuaciones de equilibrio traslacional:

$$\frac{\partial\sigma_{ii}}{\partial r_i} + \sum_{i\neq j}\frac{\partial\tau_{ij}}{\partial r_j} + \rho g_i = 0 \tag{2-5}$$

Para el caso concreto de una partícula sometida exclusivamente a su peso, se tendría una única componente de aceleración debida a las fuerzas de masa, $g_z = -g\vec{k}$, por lo que las ecuaciones anteriores se convertirían en

$$\frac{\partial\sigma_x}{\partial x} = 0$$
$$\frac{\partial\sigma_y}{\partial y} = 0$$
$$\frac{\partial\sigma_z}{\partial z} - \rho g = 0$$

al no haber tensiones cortantes. Las dos primeras ecuaciones implicarían que la tensión elástica es uniforme en las direcciones x e y, mientras que la tercera da para la tensión una dependencia

$$\sigma_{zz} = \sigma^0_{zz} + \rho g(z - z_0) \tag{2-6}$$

si la tensión es z_0 es σ^0_{zz}.Por ejemplo, para el caso de un pilar de altura L y densidad ρ, ésto daría una tensión vertical de la forma $\sigma = \rho g(z - L)$ (negativo, como corresponde a una compresión) y tensiones horizontales nulas.

En cuanto al **equilibrio rotacional**, estudiaremos los momentos de los distintos pares de fuerzas que actúan. Considerando los pares de fuerzas que dan un momento en la dirección x, como se ve en la figura 2-3 se obtiene que el momento total de las distintas fuerzas respecto del eje x es:

$$\left(\tau_{zy}(0) - \frac{\partial\tau_{zy}}{\partial y}\frac{1}{2}\delta y\right)\delta x\delta z\frac{1}{2}\delta y + \left(\tau_{zy}(0) + \frac{\partial\tau_{zy}}{\partial y}\frac{1}{2}\delta y\right)\delta x\delta z\frac{1}{2}\delta y = \\ = \delta M_{zy} = \tau_{zy}\delta x\delta y\delta z \tag{2-7}$$

para las τ_{zy}, y una expresión similar para las τ_{yz}:

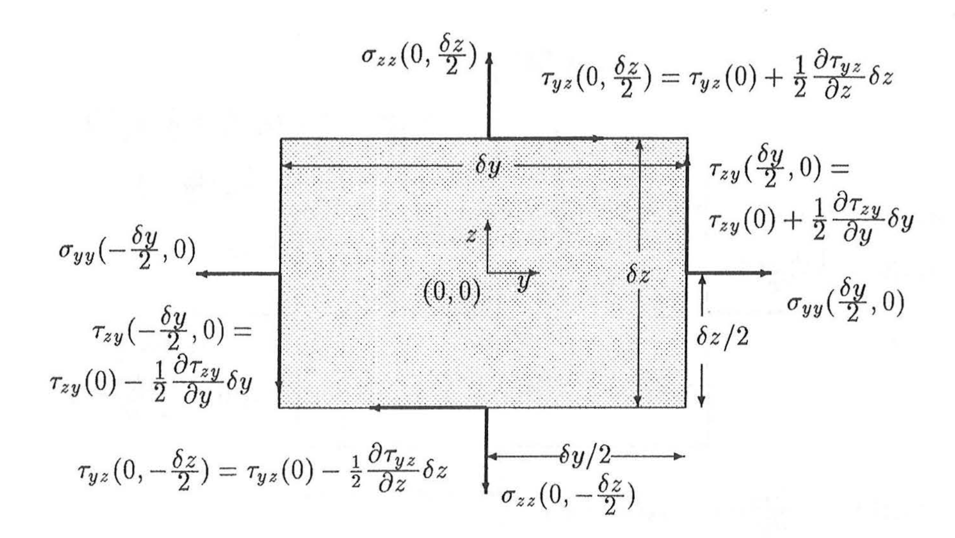


Figura 2-3: Equilibrio de momentos para tensiones inhomogéneas. Al igual que en la figura 2-3 se considera un elemento de volumen infinitesimal y se desarrolla en serie la tensión en torno al centro del elemento de volumen.

$$\delta M_{yz} = -\tau_{yz}\delta x\delta y\delta z \tag{2-8}$$

quedando la ecuación de movimiento rotacional:

$$(\tau_{zy} - \tau_{yz})\,\delta x\delta y\delta z + G_x\delta x\delta y\delta z = \delta I_x\frac{d^2\theta_x}{dt^2} \tag{2-9}$$

donde G_x es el momento por unidad de volumen debido a las fuerzas de masa en la dirección x, e I_x el momento de inercia del cuerpo sólido respecto del eje x, $I_x = \rho\int_V y^2 dV$, que va como $\sim \rho\delta x^5$. Tomando el límite $\delta \to 0$, como $\delta x\delta y\delta z$ va como δx^3, vemos que, a no ser que $\tau_{zy} - \tau_{yz} + G_x$ sea cero, $d^2\theta_x/dt^2$ debería de aumentar cada vez más por el simple hecho de tomar el límite infinitesimal en las dimensiones del problema, lo que es absurdo, luego se cumple que:

$$\begin{aligned}\tau_{zy} - \tau_{yz} + G_x &= 0\\ \tau_{xz} - \tau_{zx} + G_y &= 0\\ \tau_{yx} - \tau_{xy} + G_z &= 0\end{aligned} \tag{2-10}$$

donde ya se ha incluido el resultado que se obtiene para los ejes y y z. Sólo existe un momento debido a las fuerzas de masa en algunos casos muy especiales, como cuando hay un campo eléctrico o magnético actuando sobre un material anisótropo que se polariza o magnetiza en un campo. Así, en ausencia de estas situaciones, se tiene la importante relación:

$$\tau_{ij} = \tau_{ji} \tag{2-11}$$

es decir, las τ_{ij} son simétricas también en el caso de un sistema de tensiones inhomogéneas.

2.4 El tensor de tensiones

Hemos estado trabajando hasta ahora con las magnitudes σ_{ii} y τ_{ij} y viendo cuál es su significado como componentes de la tensión a través de una superficie. Veremos ahora que estas componentes, a las que en general llamaremos $[\tau_{ij}]$ forman un tensor de segundo orden. Para ello será suficiente demostrar que correlacionan dos vectores $\vec{p}$, $\vec{q}$ en la forma $p_i = \sum_{i,j} T_{ij}q_j$.

Si tomamos una superficie elemental δS, que contiene un punto P en el cuerpo tensionado, y denominamos $\vec{n}$ al vector unitario normal a la superficie y $\vec{t}$ al vector tensión, que representa la tensión total transmitida a través de la superficie (de carácter vectorial), tendremos que $\vec{t}\delta S$ será la fuerza total transmitida a través de la superficie.

¿Cómo cambia esta fuerza al variar la dirección de $\vec{n}$ de forma que siempre pase por el punto P?. Para abordar este problema, consideraremos el caso de:

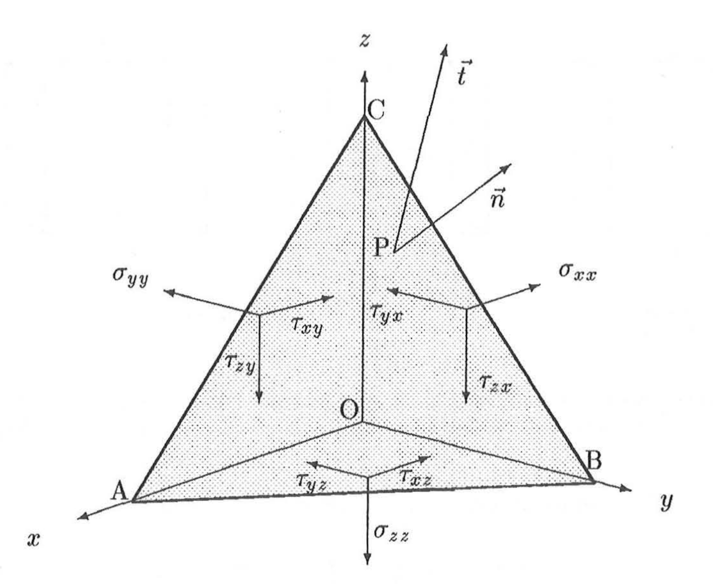


Figura 2-4: Para demostrar que las $[\tau_{ij}]$ forman un tensor de segundo orden se considera el equilibrio de fuerzas en el elemento de volumen limitado por una parte por un plano que pasa por un punto P, con una orientación descrita por un vector unitario normal n y por otra por los planos coordenados. A través de cada cara actúan las correspondientes tensiones con sus componentes y a través del plano la tensión dada por el vector tensión $\vec{t}$.

- Tensión homogénea.
- No hay fuerzas de masa.
- El cuerpo está en equilibrio.

y veremos las consecuencias de este equilibrio. Denominaremos ABC a la superficie triangular variable perpendicular a $\vec{n}$ y BOC, AOC y AOB a las otras caras triangulares. En la dirección x:

$$t_x \text{ABC} = \sigma_{xx}\text{BOC} + \tau_{xy}\text{COA} + \tau_{xz}\text{BOA} \rightarrow$$
$$\rightarrow t_x = \sigma_{xx}\frac{\text{BOC}}{\text{ABC}} + \tau_{xy}\frac{\text{COA}}{\text{ABC}} + \tau_{xz}\frac{\text{BOA}}{\text{ABC}} \tag{2-12}$$

pero como cada uno de los cocientes entre las superficies no es sino una de las componentes del vector $\vec{n}$, o lo que es lo mismo, uno de los cosenos directores de $\vec{n}$, se tiene, al repetir el proceso para las demás direcciones:

$$t_x = \sigma_{xx}n_x + \tau_{xy}n_y + \tau_{xz}n_z$$
$$t_y = \tau_{yx}n_x + \sigma_{yy}n_y + \tau_{yz}n_z \tag{2-13}$$
$$t_z = \tau_{zx}n_x + \tau_{zy}n_y + \sigma_{zz}n_z$$

o, en notación matricial:

$$\begin{pmatrix} t_x \\ t_y \\ t_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_{zz} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} n_x \\ n_y \\ n_z \end{pmatrix} \tag{2-14}$$

o vectorial:

$$t_i = \sum_j T_{ij}n_j \quad \Leftrightarrow \quad \vec{t} = [\tau_{ij}]\vec{n} \tag{2-15}$$

es decir, se transforman como las componentes de un tensor de segundo orden.

Para el caso de tensión inhomogénea, esta expresión también es válida, ya que los términos adicionales desaparecen al tomar el límite infinitesimal.

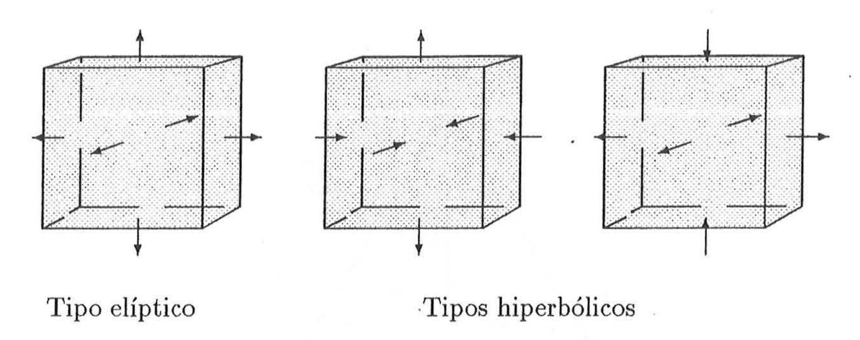


Figura 2-5: Distintos tipos de tensiones triaxiales. Cuando todas las tensiones principales tienen el mismo signo se dice que se tiene un estado de tensiones de tipo elíptico, mientras que cuando tienen distintos signos se dice que el estado de tensiones es de tipo hiperbólico.

El tensor así obtenido es simétrico, por lo que existen unos ejes en los que éste es diagonal con todos los autovalores reales:

$$\begin{pmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_{zz} \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{pmatrix} \tag{2-16}$$

donde σ_1, σ_2 y σ_3 son las tensiones principales. Cuando se escogen estas direcciones como ejes, las componentes cortantes desaparecen, quedando únicamente las componentes normales, es decir, las fuerzas sobre las caras de un cubo orientado según esas direcciones son perpendiculares a las caras.

2.5 Casos particulares

Estudiaremos ahora algunos casos particulares referidos a los ejes principales:

1. **Tensión uniaxial**, por ejemplo, una barra que tiene algo colgado de su extremo inferior. El tensor de tensiones correspondiente a este caso es:

$$\begin{pmatrix} \sigma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{2-17}$$

2. **Tensión biaxial** (estado plano de tensión). Por ejemplo, una lámina sobre la que actúan exclusivamente fuerzas contenidas en el plano de la lámina. El tensor de tensiones toma la forma:

$$\begin{pmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{2-18}$$

3. **Tensión triaxial** (caso general).

$$\begin{pmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{pmatrix} \tag{2-19}$$

Dependiendo del signo relativo de las σ_i, se clasifican en varios tipos. Cuando todas tienen el mismo signo, se tiene una tensión triaxial del **tipo elíptico**. Cuando las componentes tienen distintos signos, se tiene una tensión triaxial del **tipo hiperbólico**. En la figura se muestran estos tipos de tensiones triaxiales.

Un caso particular de tensión triaxial de especial importancia tiene lugar cuando los valores de las σ_i son iguales. Este caso es el denominado tensión hidrostática, tomando el tensor de tensiones la forma:

$$\begin{pmatrix} -p & 0 & 0 \\ 0 & -p & 0 \\ 0 & 0 & -p \end{pmatrix} \quad \text{o} \quad -p\delta_{ij} \tag{2-20}$$

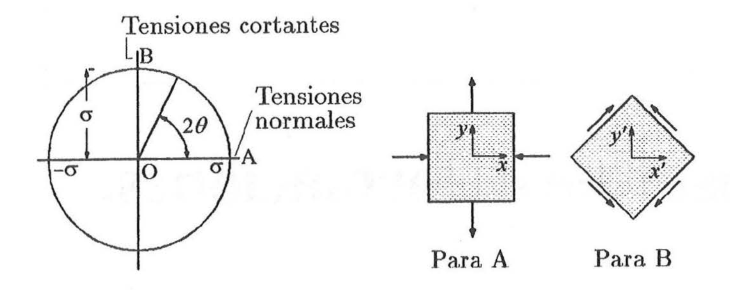


Figura 2-6: esfuerzos cortantes a 0° y 45°

El tensor hidrostático se mantiene diagonal con las mismas componentes con independencia del sistema de ejes escogido, no se transforma frente a la rotación.

4. **Esfuerzo cortante puro**. Aparece por ejemplo, al torsionar una varilla larga, o al cortar una chapa metálica con una cizalla. Para este caso, el tensor de tensiones toma, en el sistema de ejes principales, la siguiente forma (para tensión en el plano xy).

$$\begin{pmatrix} -\sigma & 0 & 0 \\ 0 & \sigma & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{2-21}$$

Si rotamos 45° alrededor del eje principal 3 (z), las componentes normales desaparecen y el tensor de tensiones toma la forma:

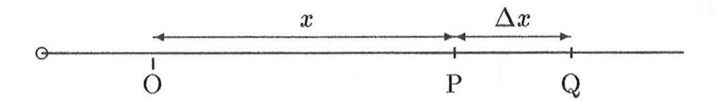
$$\begin{pmatrix} 0 & \sigma & 0 \\ \sigma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{2-22}$$

donde todas las componentes son cortantes.

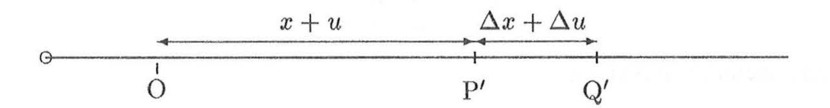
3 El tensor de deformaciones.

3.1 Deformación en una dimensión.

Antes de pasar a considerar los casos más generales de deformación en dos y tres dimensiones, trataremos el caso más sencillo, que realmente ya se ha visto en el tema introductorio, el de la deformación en una dimensión.



a) Antes de estirar el hilo



b) Después de estirar el hilo

Figura 3-1: Deformaciones en una dimensión

Se considera un hilo elástico que es estirado. Sea O, el origen del sistema de coordenadas, un punto fijo en el espacio (no en el hilo, ni fijado al hilo), y P y Q dos puntos fijos sobre el hilo. Al estirar, tendremos una contribución de traslación pura en las nuevas posiciones P′ y Q′ de los puntos P y Q, dada por u, como se muestra en la figura.

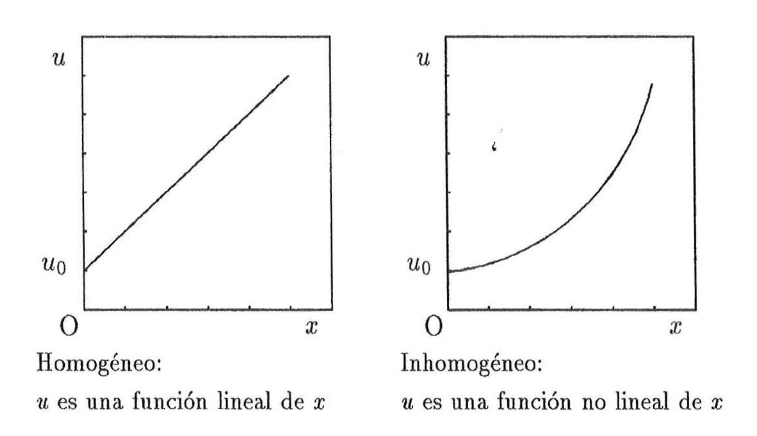


Figura 3-2: Deformaciones homogéneas e inhomogéneas. En el caso de las deformaciones homogéneas u varía de forma lineal con x, mientras que para las deformaciones inhomogéneas ésto no es así.

Después de estirar, el punto P pasa al P′, el Q al Q′ y la distancia OP=x a la distancia OP′=$x + u$.

La forma concreta en que cambian estas distancias depende de como es el proceso que se está estudiando. Si éste es homogéneo, el comportamiento es del tipo representado en la parte izquierda de la figura 3-2. En este caso, en el proceso de estiramiento u es una función lineal de x. La parte derecha de la misma figura muestra un ejemplo de una deformación inhomogénea concreta, en la cual u es una función no lineal de x. La forma concreta de la función depende de la deformación concreta.

En realidad, en lo que estamos interesados no es tanto en los desplazamientos absolutos, como en los desplazamientos relativos, ya que son éstos los que nos darán el estado de deformaciones de un cuerpo. Para ello definimos la deformación en la sección PQ en la forma:

$$\frac{\Delta \text{longitud}}{\text{longitud original}} = \frac{\text{P}'\text{Q}' - \text{PQ}}{\text{PQ}} = \frac{\Delta u}{\Delta x} \tag{3-1}$$

y al considerar la deformación de segmentos cada vez más pequeños, tendremos la deformación en el punto P que queda como:

$$\epsilon = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} = \frac{du}{dx} \tag{3-2}$$

Para el caso de deformación homogénea[1], se tiene $u = u_0 + \epsilon x$, donde u_0 es el desplazamiento original del punto y ϵ una constante, la deformación unitaria.

3.2 Deformación en dos dimensiones.

3.2.1 El tensor de desplazamientos y el tensor de deformaciones.

Estudiamos ahora como se deforma una hoja plana. Como el caso unidimensional, tomaremos dos puntos P y Q, de coordenadas $\vec{r}$ y $\vec{r} + \Delta\vec{r}$ (véase la figura 3-3), de forma que $\Delta\vec{r}$ es el vector posición de Q medido desde P, y veremos como se desplazan durante la deformación. Como de costumbre, nos restringiremos a desplazamientos pequeños, ocurriendo que $\text{P}(x, y) \to \text{P}(x + u_x, y + u_y)$.

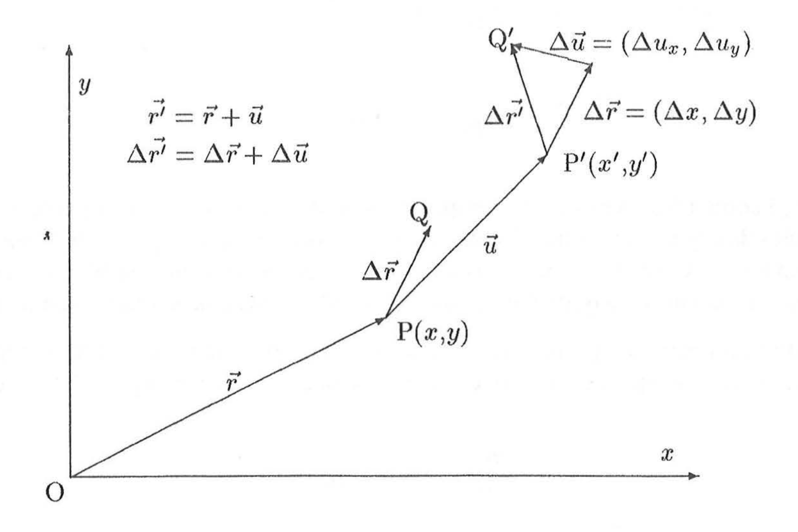


Figura 3-3: Deformación en dos dimensiones

Consideremos ahora el punto Q próximo a P cuyo vector de posición relativo a P es $\Delta\vec{r}$. Como consecuencia de la deformación, este punto se mueve a Q′. Se cumple PQ → P′Q′, con $(\Delta x, \Delta y) \to (\Delta x + \Delta u_x, \Delta y + \Delta u_y)$, donde

[1]Para el caso de deformación inhomogénea se tendría la integral $u - u_0 = \int_{x=x_0}^{x} \epsilon(x)dx$

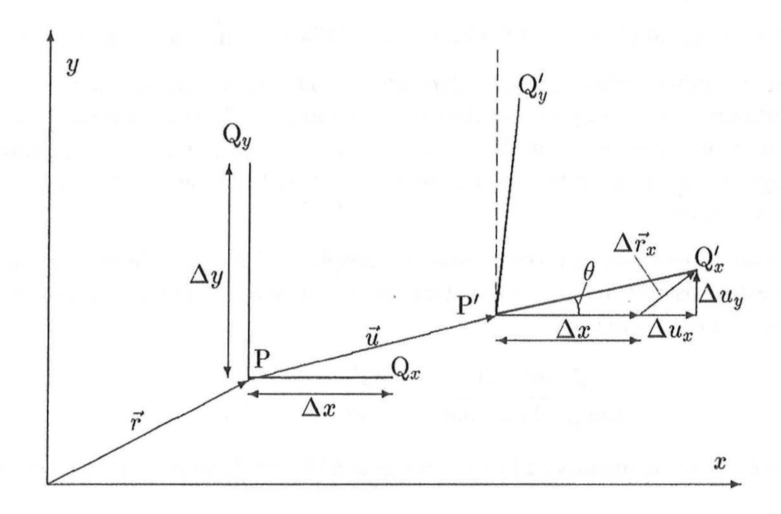


Figura 3-4: Significado físico de las componentes del tensor de desplazamientos $[e_{ij}]$.

$\Delta\vec{u}$ es la diferencia entre los desplazamientos de los puntos P y Q separados originalmente por $\Delta\vec{r}$. Definimos las magnitudes:

$$e_{xx} = \frac{\partial u_x}{\partial x} \quad e_{yy} = \frac{\partial u_y}{\partial y} \quad e_{xy} = \frac{\partial u_x}{\partial y} \quad e_{yx} = \frac{\partial u_y}{\partial x} \tag{3-3}$$

que son cantidades *adimensionales* pequeñas comparadas con la unidad. Es necesario tener precaución de no incluir en las expresiones de la deformación términos que corresponden a traslación como un sólido rígido, ya que éstos dan una variación de la posición absoluta de Q. Como en vez de la posición absoluta de Q se está considerando la posición relativa de Q respecto de P (es decir $\Delta\vec{r}$) y cuál es la variación de ésta (es decir $\Delta\vec{u}$), se está dejando de lado de forma consciente la variación de la posición de P producida no por la deformación entre P y Q, sino por la traslación (y rotación) del punto P. En función de la variación de la posición de P, la variación de la posición relativa de P y Q (es decir $\Delta\vec{u}$) tiene la forma:

$$\begin{aligned} \Delta u_x &= \frac{\partial u_x}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial u_x}{\partial y}\Delta y = e_{xx}\Delta x + e_{xy}\Delta y \\ \Delta u_y &= \frac{\partial u_y}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial u_y}{\partial y}\Delta y = e_{yx}\Delta x + e_{yy}\Delta y \end{aligned} \tag{3-4}$$

Como tanto $(\Delta u_x, \Delta u_y)$ como $(\Delta x, \Delta y)$ son las componentes de dos vectores, y un conjunto de componentes que relacionan las componentes de dos vectores como lo hacen en este caso son las componentes de un tensor de segundo orden, las e_{ij} formarán un tensor. Como ya se ha visto con anterioridad, el hecho de considerar la variación del vector $\vec{u}$ en vez de las variaciones del vector $\vec{r}$ ya quita del estudio del problema las traslaciones como un sólido rígido.

Queda ahora por estudiar otra parte del problema, como varían las formas durante la deformación. Para ello consideramos dos direcciones según los ejes de modo que $\Delta y = 0$ para PQ_x y $\Delta x = 0$ para PQ_y (Véase la figura 3-4). Para PQ_x se tiene:

$$\begin{aligned} \Delta u_x &= \frac{\partial u_x}{\partial x}\Delta x = e_{xx}\Delta x \\ \Delta u_y &= \frac{\partial u_y}{\partial x}\Delta x = e_{yx}\Delta x \end{aligned} \tag{3-5}$$

Así, $e_{xx}=\Delta u_x/\Delta x$ mide la deformación por unidad de longitud de PQ_x, medida a lo largo de Ox. e_{yx} mide la rotación (antihoraria) de PQ_x, ya que el ángulo de giro viene dado por:

$$\tan\theta = \frac{\Delta u_y}{\Delta x + \Delta u_x} \approx \frac{\Delta u_y}{\Delta x} \quad \rightarrow \quad \theta = \frac{\Delta u_y}{\Delta x} \tag{3-6}$$

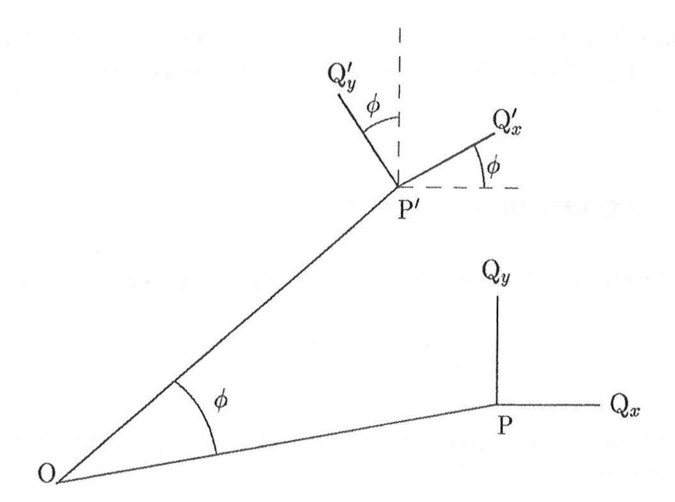


Figura 3-5: Efecto de la rotación como un sólido rígido

al cumplirse que, para deformaciones pequeñas $\tan\theta \sim \theta$.

Procediendo del mismo modo para PQ_y se obtiene que e_{yy} es la deformación por unidad de longitud de PQ_y según Oy, y que e_{xy} es la rotación en sentido horario de PQ_y a $P'Q'_y$.

Para que este tensor sea una buena medida del estado de deformaciones en el punto P, es evidente que cuando no hay distorsión todas las e_{ij} deben ser 0. Sin embargo, esto no siempre es así. Para ver ésto, consideraremos el caso en que el cuerpo objeto de estudio gira como un sólido rígido un pequeño ángulo Φ en sentido antihorario. Cuando se tiene en cuenta el significado geométrico de las e_{ij} se tiene un tensor de la forma:

$$e_{ij} = \begin{pmatrix} 1 - \cos\Phi & -\text{sen}\Phi \\ \text{sen}\Phi & 1 - \cos\Phi \end{pmatrix} \tag{3-7}$$

que, en el límite de pequeñas deformaciones queda

$$e_{ij} =\approx \begin{pmatrix} 0 & -\Phi \\ \Phi & 0 \end{pmatrix} \tag{3-8}$$

Así, observamos que aunque no hay una distorsión real, las e_{ij} no se hacen 0. La razón de ésto es que tenemos incluida en el tensor el efecto de la rotación como un sólido rígido, y esta contribución no corresponde a una deformación real. Para tener un tensor que realmente caracterice el estado de deformaciones en un punto, tendremos que sacar esta contribución. Para ello, descomponemos el tensor de segundo rango que hemos obtenido en la suma de dos tensores, uno simétrico y uno antisimétrico $[e_{ij}] = [\epsilon_{ij}] + [\omega_{ij}]$, con las componentes definidas en la forma:

$$\epsilon_{ij} = \frac{1}{2}(e_{ij} + e_{ji}) \quad \text{y} \quad \omega_{ij} = \frac{1}{2}(e_{ij} - e_{ji}) \tag{3-9}$$

El tensor antisimétrico $[\omega_{ij}]$, que como hemos visto corresponde a una rotación pura estará asociado a la rotación del cuerpo como un sólido rígido. El tensor $[\epsilon_{ij}]$, que es simétrico, es el tensor de deformaciones, y es el que da el estado de deformaciones de un cuerpo en un punto.

$$\begin{pmatrix} \epsilon_{xx} & \epsilon_{xy} \\ \epsilon_{yx} & \epsilon_{yy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e_{xx} & \frac{1}{2}(e_{xy} + e_{yx}) \\ \frac{1}{2}(e_{xy} + e_{yx}) & e_{yy} \end{pmatrix} \tag{3-10}$$

Las componentes diagonales son las deformaciones normales o componentes normales de la deformación y dan las deformaciones unitarias en las direcciones Ox y Oy, mientras que las componentes no diagonales corresponden a

la deformación por corte. Dos elementos de longitud paralelos a Ox y Oy antes de la deformación, forman entre sí después de ésta un ángulo $\frac{\pi}{2} - 2\epsilon_{xy}$. Es conveniente recalcar que la deformación por corte ϵ_{xy} es la mitad del cambio de ángulo entre los elementos.

3.2.2 Deformación homogénea en dos dimensiones.

Durante una distorsión homogénea, las e_{ij} son constantes a lo largo del cuerpo y se tiene:

$$u_i = (u_0)_i + e_{ij} r_j \quad \begin{matrix} (i,j = x,y) \\ (r_i, r_j = x,y) \end{matrix} \tag{3-11}$$

donde $(u_0)_i$ es el desplazamiento del punto original en el eje Or_i. Una curva que antes de la deformación es $f(x,y)$=0 pasa a ser después de la deformación $f(x',y')$=0, con

$$\begin{aligned} x' &= x + u_x = (u_0)_x + x + e_{xx}x + e_{xy}y \\ y' &= y + u_y = (u_0)_y + y + e_{yx}x + e_{yy}y \end{aligned} \tag{3-12}$$

Por ser una sustitución lineal se tiene que, durante una deformación homogénea:

1. Las líneas rectas siguen siendo líneas rectas.
2. Las líneas paralelas siguen manteniéndose paralelas entre sí después de la deformación.
3. Todas las líneas rectas en una dirección se extienden o contraen un mismo factor.
4. Una elipse se transforma en otra elipse, y en particular, un círculo en una elipse.

3.3 Deformación en tres dimensiones.

Para abordar el estudio de las deformaciones en tres dimensiones se sigue un procedimiento completamente similar al seguido en dos dimensiones, por lo que no se repetirá. Se definen nueve componentes de un tensor en la forma:

$$e_{ij} = \frac{\partial u_i}{\partial r_j} \quad \begin{matrix} (i,j = x,y,z) \\ (r_x, r_y, r_z = x,y,z) \end{matrix} \tag{3-13}$$

donde e_{xx}, e_{yy}, e_{zz} representan deformaciones unitarias en las direcciones Ox, Oy y Oz, respectivamente, e_{xy} representa la rotación alrededor de Oz de un elemento originalmente paralelo a Oy hacia Ox, e_{yx} representa la rotación alrededor de Oz de un elemento paralelo a Ox hacia Oy, y del mismo modo para los demás elementos. Por el mismo procedimiento que en el caso bidimensional se obtiene que este tensor no es una buena medida del estado de deformaciones de un cuerpo en un punto, que debe estar dado por un tensor simétrico, para evitar la contribución de la rotación del cuerpo como un sólido rígido. Así, se define el tensor deformación a partir de $[e_{ij}]$ en la forma $\epsilon_{ij} = \frac{1}{2}(e_{ij} + e_{ji})$, quedando:

$$\begin{pmatrix} \epsilon_{xx} & \epsilon_{xy} & \epsilon_{xz} \\ \epsilon_{yx} & \epsilon_{yy} & \epsilon_{yz} \\ \epsilon_{zx} & \epsilon_{zy} & \epsilon_{zz} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e_{xx} & \frac{1}{2}(e_{xy}+e_{yx}) & \frac{1}{2}(e_{xz}+e_{zx}) \\ \frac{1}{2}(e_{yx}+e_{xy}) & e_{yy} & \frac{1}{2}(e_{yz}+e_{zy}) \\ \frac{1}{2}(e_{zx}+e_{xz}) & \frac{1}{2}(e_{zy}+e_{yz}) & e_{zz} \end{pmatrix} \tag{3-14}$$

donde las componentes diagonales y no diagonales tienen el mismo significado que en el caso bidimensional, componentes normales y cortantes de la deformación.

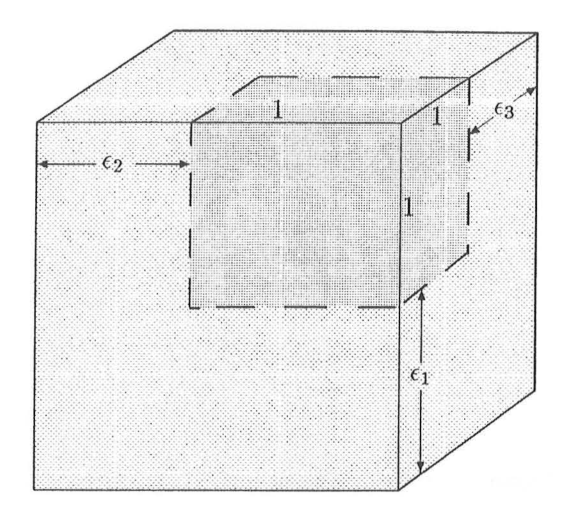


Figura 3-6: Deformación volumétrica

3.3.1 Deformación homogénea en tres dimensiones.

Se tiene, para este caso de tres dimensiones que, una vez separadas las rotaciones:

$$u_i = (u_0)_i + \sum_j \omega_{ij} r_j + \sum_j \epsilon_{ij} r_j \tag{3-15}$$

Para separar por completo la parte de sólido rígido (traslación más rotación) se define:

$$\overline{u}_i = \sum_j \epsilon_{ij} r_j \tag{3-16}$$

Como el tensor de deformaciones es un tensor simétrico, existirá un sistema de ejes en el que éste sea diagonal (ejes principales), y en el cual se tienen las deformaciones principales ϵ_1, ϵ_2, ϵ_3:

$$\begin{pmatrix} \epsilon_{xx} & \epsilon_{xy} & \epsilon_{xz} \\ \epsilon_{yx} & \epsilon_{yy} & \epsilon_{yz} \\ \epsilon_{zx} & \epsilon_{zy} & \epsilon_{zz} \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} \epsilon_1 & 0 & 0 \\ 0 & \epsilon_2 & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon_3 \end{pmatrix} \tag{3-17}$$

Además de ser los ejes en los que el tensor de tensiones es diagonal, se cumple que los ejes principales son tres direcciones mutuamente ortogonales que siguen siendo ortogonales después de la deformación.

Si consideramos un cubo de arista unidad, según los ejes principales. El cambio de volumen del cubo es la dilatación unitaria:

$$\frac{\Delta V}{V} = (1+\epsilon_1)(1+\epsilon_2)(1+\epsilon_3) - 1 = \epsilon_1 + \epsilon_2 + \epsilon_3 \tag{3-18}$$

que es un invariante (la traza del tensor). Para un sistema de ejes generales, se cumple que $\epsilon_{xx}+\epsilon_{yy}+\epsilon_{zz}$ es independiente del sistema de ejes escogido. A esta traza también se le denomina invariante de primer orden.

El elipsoide de deformación surge al estudiar como es la deformación de una esfera unidad en $\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3$:

$$r_1^2 + r_2^2 + r_3^2 = 1 \rightarrow \frac{r_1^2}{(1+\epsilon_1)^2} + \frac{r_2^2}{(1+\epsilon_2)^2} + \frac{r_3^2}{(1+\epsilon_3)^2} = 1 \tag{3-19}$$

siendo esta última expresión la del elipsoide de deformación.

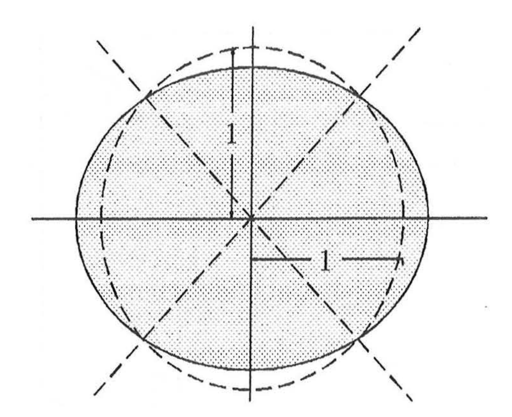


Figura 3-7: Deformación de una esfera en un cortante

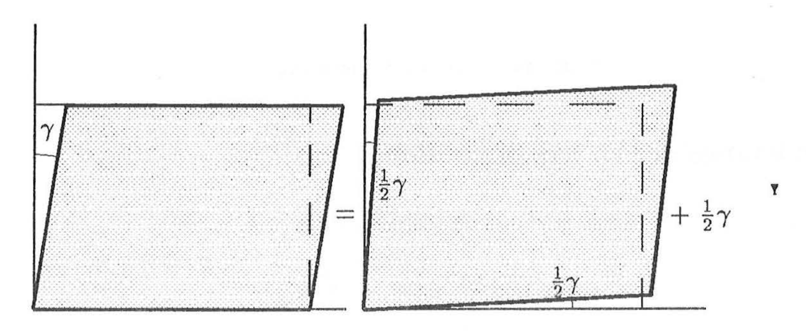


Figura 3-8: Cortantes puro y simple

En ingeniería se suele utilizar una notación diferente para las deformaciones cortantes, escribiendo ϵ_{ij} en la forma:

$$\begin{pmatrix} \epsilon_{xx} & \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \frac{1}{2}\gamma_{xz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{yx} & \epsilon_{yy} & \frac{1}{2}\gamma_{yz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{zx} & \frac{1}{2}\gamma_{zy} & \epsilon_{zz} \end{pmatrix} \text{con } \gamma_{ij} = 2\epsilon_{ij} \tag{3-20}$$

Así, por ejemplo γ_{xy}, es igual a la variación del ángulo entre dos líneas que estaban dirigidas originalmente según las direcciones Ox y Oy. Aunque a menudo se les llama componentes cortantes de la deformación, deformaciones cortantes o simplemente cortantes, en sí no son componentes del tensor de deformaciones, ya que a causa del factor 2 no se transforman bajo rotación como las componentes de un tensor.

3.3.2 Deformación plana.

En el caso de la deformación plana, una de las deformaciones principales es 0. Un cortante puro es un caso especial de deformación plana que tiene la forma, para un cortante en el plano xy:

$$\begin{pmatrix} 0 & \epsilon & 0 \\ \epsilon & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to 45^\circ \to \begin{pmatrix} -\epsilon & 0 & 0 \\ 0 & \epsilon & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{3-21}$$

donde se representa el efecto de rotar el sistema de ejes 45 grados alrededor de z. La traza es 0, es decir la dilatación es 0. Esto se puede apreciar en la figura 3-7, donde se muestra como es la deformación de una esfera en esas condiciones. Se puede observar como es cero la extensión en las giradas 45°.

El caso del cortante simple que se había estudiado en el primer tema corresponde a un deformación cortante pura más una rotación de $\frac{1}{2}\gamma$, como se puede ver en la figura 3-8.

3.4 Expansión térmica.

Asimismo, se puede utilizar el tensor de deformaciones para especificar la deformación resultante del cambio de temperatura de un material. Cuando se produce un pequeño cambio de temperatura ΔT, de forma uniforme en todo el cuerpo, aparece una deformación homogénea a lo largo del material. En estas condiciones, las componentes de $\epsilon_{ij}^{tér}$ son proporcionales a ΔT:

$$\epsilon_{ij}^{tér} = \alpha_{ij}\Delta T \tag{3-22}$$

siendo las α_{ij} los coeficientes de expansión térmica lineal o coeficientes de dilatación lineal. Como $[\epsilon_{ij}^{tér}]$ es un tensor simétrico, $[\alpha_{ij}]$ también será un tensor simétrico, al ser el anterior multiplicado por una constante.

Por esta misma razón, los ejes principales del tensor $[\alpha_{ij}]$ coincidirán con los del tensor $[\epsilon_{ij}^{tér}]$. En los ejes principales se tendrá:

$$\epsilon_{1_{(térmica)}} = \alpha_1\Delta T \quad \epsilon_{2_{(térmica)}} = \alpha_2\Delta T \quad \epsilon_{3_{(térmica)}} = \alpha_3\Delta T \tag{3-23}$$

siendo los α_1, α_2, α_3 los coeficientes principales de expansión térmica. Por efecto del cambio de temperatura, una esfera del material se convierte en un elipsoide con ejes proporcionales a $(1+\alpha_1)$, $(1+\alpha_2)$ y $(1+\alpha_3)$.

La cuádrica para la expansión térmica es:

$$\begin{aligned} \textstyle\sum_{i,j} \alpha_{ij} r_i r_j &= 1 \qquad \text{en unos ejes generales} \\ \alpha_1 r_1^2 + \alpha_2 r_2^2 + \alpha_3 r_3^2 &= 1 \qquad \text{en los ejes principales} \end{aligned} \tag{3-24}$$

El coeficiente de expansión de volumen o coeficiente de dilatación cúbica α_v es la traza del tensor $[\alpha_{ij}]$, que en el sistema de ejes principales es $\alpha_v = \alpha_1+\alpha_2+\alpha_3$ y en un sistema de ejes generales xyz es $\alpha_v = \alpha_{xx}+\alpha_{yy}+\alpha_{zz}$. Aunque los α_{ij} suelen ser positivos, hay algunos materiales que los tienen negativos (calcita, berilio, ioduro de plata, etc...).

En materiales isótropos, que son buena parte de los materiales que interesan en este curso, todas las α_{ij} son iguales entre sí y se tiene $\alpha_v = 3\alpha_l$, donde hemos llamado al coeficiente de expansión térmico lineal α_l, quedando las relaciones entre las dimensiones iniciales y finales en la forma:

$$l = l_0(1 + \alpha_l\Delta T) \quad V = V_0(1 + \alpha_v\Delta T) \text{ con } \alpha_v = 3\alpha_l \tag{3-25}$$

como ya se vio anteriormente.

4 La ley de Hooke generalizada.

4.1 El tensor de las constantes elásticas.

Se ha visto en el primer capítulo la forma que tiene la ley de Hooke para el caso de una tensión normal y la deformación unitaria normal asociada, así como para el caso de una tensión cortante y el ángulo de deformación asociado.

$$\begin{aligned} \sigma &= E\epsilon \\ \tau &= G\gamma \end{aligned} \tag{4-1}$$

y es el momento de preguntarse cual es la forma que toma esta ley de Hooke cuando se tiene el efecto combinado de tensiones normales y cortantes en el entorno próximo de un punto del material. Hemos visto que para el caso general, el estado de tensiones de un cuerpo se describe mediante un tensor de tensiones $[\tau_{ij}]$, y el estado de deformaciones del mismo mediante un tensor $[\epsilon_{ij}]$, y lo que nos estamos preguntando en este momento es cómo y cuál es la relación entre los tensores de tensiones y deformaciones. Como los tensores de tensiones y deformaciones son tensores de segundo orden, estarán relacionados por un tensor de cuarto orden, que relacionará las componentes de la tensión y de la deformación en la forma:

$$\tau_{ij} = \sum_{kl} C_{ijkl}\epsilon_{kl} \tag{4-2}$$

o, a la inversa:

$$\epsilon_{ij} = \sum_{kl} S_{ijkl}\tau_{kl} \tag{4-3}$$

donde las C_{ijkl} son las constantes elásticas del material y S_{ijkl} las complianzas del material. Al tensor de las C_{ijkl} se le denomina tensor de las constantes elásticas. A la relación 4-2 (o a la 4-3) se le denomina ley de Hooke generalizada.

De este modo, se observa que en general, el resultado de aplicar una tensión genérica τ_{ij} es una deformación unitaria resultante no nula no sólo en la misma componente, sino en principio en todas las demás. Asimismo, en el caso general, una componente cualquiera del tensor de deformaciones puede tener su origen en cualquiera de las componentes del tensor de tensiones, o en varias de ellas a la vez. Así, por ejemplo, para la componente σ_{xx} de la tensión se tiene:

$$\begin{aligned} \sigma_{xx} \equiv \tau_{xx} = \ & C_{xxxx}\epsilon_{xx} + C_{xxxy}\epsilon_{xy} + C_{xxxz}\epsilon_{xz} + \\ & + C_{xxyx}\epsilon_{yx} + C_{xxyy}\epsilon_{yy} + C_{xxyz}\epsilon_{yz} + \\ & + C_{xxzx}\epsilon_{zx} + C_{xxzy}\epsilon_{zy} + C_{xxzz}\epsilon_{zz} \end{aligned} \tag{4-4}$$

y de forma análoga para las otras ocho componentes del tensor de tensiones. De este modo se observa que la relación entre el tensor de tensiones y el de deformaciones es a través de un tensor de cuarto orden y tres dimensiones que en general tendrá 81 componentes.

Un análisis de las propiedades de los tensores de tensiones y deformaciones nos muestra que el número de constantes elásticas independientes es sensiblemente menor ya que muchas de ellas son iguales entre sí, incluso en el caso más desfavorable. Para ver esto consideremos en primer lugar la forma que toma la relación entre el tensor de tensiones y el de deformaciones para una componente general τ_{ij} del tensor de tensiones:

$$\tau_{ij} = C_{ijxx}\epsilon_{xx} + C_{ijxy}\epsilon_{xy} + \cdots + C_{ijyx}\epsilon_{yx} + \cdots \tag{4-5}$$

Como el tensor de deformaciones es un tensor simétrico, podremos escribir:

$$C_{ijxy}\epsilon_{xy} + C_{ijyx}\epsilon_{yx} = (C_{ijxy} + C_{ijyx})\epsilon_{xy} \tag{4-6}$$

y análogamente para las demás componentes del mismo tipo. Así, vemos que las componentes C_{ijkl} y C_{ijlk} no aparecen nunca de forma independiente, sino siempre como la suma de las dos. De hecho, cuando se miden experimentalmente estas constantes elásticas, no se miden cada una por separado, sino siempre se mide la suma de las dos, y lo que afecta al resultado no es cada uno de los valores individuales, sino su suma. Así, la relación entre tensiones y deformaciones es la misma para cualesquiera valores individuales de C_{ijkl} y C_{ijlk} que den el valor correcto de la suma. La elección más sencilla consiste en escoger ambas constantes elásticas iguales entre sí, e iguales por tanto cada una de ellas a la semisuma de las dos, a la mitad del valor experimental de la suma:

$$C_{ijkl} = C_{ijlk} \tag{4-7}$$

Consideremos ahora los desarrollos para las dos tensiones τ_{ij} y τ_{ji}:

$$\begin{aligned} \tau_{ij} &= \sum_{kl} C_{ijkl}\epsilon_{kl} \\ \tau_{ji} &= \sum_{kl} C_{jikl}\epsilon_{kl} \end{aligned} \tag{4-8}$$

Como el tensor de tensiones es simétrico, $\tau_{ij}=\tau_{ji}$ y restando las dos expresiones se tiene:

$$\tau_{ij} - \tau_{ji} = 0 = \sum_{kl}(C_{ijkl} - C_{jikl})\epsilon_{kl} \tag{4-9}$$

que debe ser cero cualquiera que sean las deformaciones unitarias. Para que esto sea así, se debe cumplir:

$$C_{ijkl} = C_{jikl} \tag{4-10}$$

Estas dos condiciones deben de cumplirse siempre y reducen el número de constantes elásticas independientes de 81 a 36.

4.2 Isotropía. Constantes de Lamé.

Se dice que un cuerpo es isótropo cuando todas las direcciones son equivalentes en el mismo. En el caso de un cuerpo isótropo, el número de constantes elásticas independientes se reduce drásticamente de 36 a sólo dos. En un cuerpo isótropo, los ejes principales de los tensores de tensiones y deformaciones coinciden (los ejes de la cuádrica de tensiones coinciden con los ejes de la cuádrica de deformaciones). Esto hace que para un cuerpo homogéneo, sólo haya dos constantes elásticas independientes. Por ejemplo, para la tensión normal σ_{xx}, la ley de Hooke queda:

$$\sigma_{xx} = C_{xxxx}\epsilon_{xx} + C_{xxyy}(\epsilon_{yy} + \epsilon_{zz}) \tag{4-11}$$

y para una tensión cortante genérica queda:

$$\tau_{ij} = (C_{xxxx} - C_{xxyy})\epsilon_{ij} \qquad \text{para} \qquad i \neq j \tag{4-12}$$

En vez de las constantes elásticas anteriores, en el caso de materiales isótropos se suelen utilizar las constantes de Lamé, definidas en la forma:

$$\lambda = C_{xxyy} \qquad\qquad 2\mu = C_{xxxx} - C_{xxyy} \tag{4-13}$$

quedando la relación entre las tensiones y deformaciones normales en la forma:

$$\begin{aligned} \sigma_{xx} &= \lambda(\epsilon_{xx} + \epsilon_{yy} + \epsilon_{yz}) + 2\mu\epsilon_{xx} = \lambda\theta + 2\mu\epsilon_{xx} = (\lambda + 2\mu)\epsilon_{xx} + \lambda(\epsilon_{yy} + \epsilon_{zz}) \\ \sigma_{yy} &= \lambda(\epsilon_{xx} + \epsilon_{yy} + \epsilon_{yz}) + 2\mu\epsilon_{yy} = \lambda\theta + 2\mu\epsilon_{yy} = (\lambda + 2\mu)\epsilon_{yy} + \lambda(\epsilon_{xx} + \epsilon_{zz}) \\ \sigma_{zz} &= \lambda(\epsilon_{xx} + \epsilon_{yy} + \epsilon_{yz}) + 2\mu\epsilon_{zz} = \lambda\theta + 2\mu\epsilon_{zz} = (\lambda + 2\mu)\epsilon_{zz} + \lambda(\epsilon_{xx} + \epsilon_{yy}) \end{aligned} \tag{4-14}$$

donde θ=ϵ_{xx}+ϵ_{yy}+ϵ_{zz} es la deformación cúbica o deformación unitaria de volumen. Para las componentes cortantes se tiene una relación de la forma:

$$\tau_{xy} = 2\mu\epsilon_{xy} \qquad \tau_{xz} = 2\mu\epsilon_{xz} \qquad \tau_{yz} = 2\mu\epsilon_{yz} \tag{4-15}$$

Analizando ambas relaciones, se observa que, en el caso isótropo, la relación entre las componentes normales del tensor de deformaciones es sólo con las componentes normales del tensor de tensiones, y que la relación entre las componentes cortantes del tensor de deformaciones es sólo con la misma componente cortante del tensor de tensiones. Así, para un cuerpo isótropo, cada una de las tensiones normales da lugar en principio a deformaciones normales distintas de cero en todas las direcciones normales, pero no a deformaciones tangenciales.

Las constantes de Lamé λ y μ así definidas tienen dimensiones de presión como el módulo de Young, las tensiones, o los módulos de rigidez o compresibilidad. Para cuerpos muy rígidos, λ y μ son prácticamente iguales, mientras que cuanto mas plástico es el material menor es μ.

Las constantes elásticas distintas de cero quedan de la forma:

$$\begin{aligned} C_{xxxx} = C_{yyyy} = C_{zzzz} = 2\mu + \lambda \\ C_{xxyy} = C_{yyxx} = C_{yyzz} = C_{zzyy} = C_{xxzz} = C_{zzxx} = \lambda \\ C_{yzyz} = C_{xzxz} = C_{yxyx} = \tfrac{1}{2}(C_{xxxx} - C_{xxyy}) = \mu \end{aligned} \tag{4-16}$$

siendo cero todas las otras constantes elásticas que no están relacionadas con estas a través de C_{ijkl}=C_{ijlk}=C_{jikl}=C_{jilk}.

4.3 Coeficientes de elasticidad.

Escribiendo las relaciones anteriores en la forma:

$$\begin{aligned} \sigma_{xx} &= (\lambda + 2\mu)\epsilon_{xx} + \lambda(\epsilon_{yy} + \epsilon_{zz}) \qquad & \tau_{xz} &= 2\mu\epsilon_{xz} \\ \sigma_{yy} &= (\lambda + 2\mu)\epsilon_{yy} + \lambda(\epsilon_{xx} + \epsilon_{zz}) \qquad & \tau_{xy} &= 2\mu\epsilon_{xy} \\ \sigma_{zz} &= (\lambda + 2\mu)\epsilon_{zz} + \lambda(\epsilon_{xx} + \epsilon_{yy}) \qquad & \tau_{yz} &= 2\mu\epsilon_{yz} \end{aligned} \tag{4-17}$$

es posible despejar las deformaciones unitarias. Para ello se utiliza la regla de Cramer quedando para la deformación unitaria según x:

$$\epsilon_{xx} = \frac{\begin{vmatrix} \sigma_{xx} & \lambda & \lambda \\ \sigma_{yy} & (\lambda+2\mu) & \lambda \\ \sigma_{zz} & \lambda & (\lambda+2\mu) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \lambda+2\mu & \lambda & \lambda \\ \lambda & \lambda+2\mu & \lambda \\ \lambda & \lambda & \lambda+2\mu \end{vmatrix}} = \frac{\lambda+2\mu}{\mu(2\mu+3\lambda)}\sigma_{xx} - \frac{\lambda}{2\mu(2\mu+3\lambda)}(\sigma_{yy} + \sigma_{zz}) \tag{4-18}$$

Se definen las cantidades E y Ω en la forma:

$$E = \frac{\mu(2\mu+3\lambda)}{\lambda+2\mu} \qquad \Omega = \frac{2\mu(2\mu+3\lambda)}{\lambda} \tag{4-19}$$

aunque en vez de Ω se acostumbra a usar el cociente:

$$\nu = \frac{E}{\Omega} = \frac{\lambda}{2(\lambda+\mu)} \tag{4-20}$$

donde E y ν son respectivamente el módulo de Young y el coeficiente de Poisson, que ya conocemos. En función de estas magnitudes las expresiones quedan, para el caso isótropo en la forma que ya conocemos:

$$\begin{aligned}\epsilon_{xx} &= \frac{1}{E}\left[\sigma_{xx} - \nu(\sigma_{yy} + \sigma_{zz})\right] \\ \epsilon_{yy} &= \frac{1}{E}\left[\sigma_{yy} - \nu(\sigma_{xx} + \sigma_{zz})\right] \\ \epsilon_{zz} &= \frac{1}{E}\left[\sigma_{zz} - \nu(\sigma_{xx} + \sigma_{yy})\right]\end{aligned} \tag{4-21}$$

Al obtener la expresión de la constante de Lamé μ se observa que ésta coincide con el módulo de rigidez, quedando las relaciones entre las constantes de Lamé y E y ν :

$$G = \mu = \frac{E}{2(1+\nu)} \qquad \lambda = \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \tag{4-22}$$

Recordemos asimismo que, para el caso de tensión hidrostática, se tenía, para la deformación volumétrica:

$$\theta = \frac{\Delta V}{V} = 3\epsilon = \frac{\sigma}{\mathcal{K}} \tag{4-23}$$

donde $\mathcal{K}$ es el módulo de compresibilidad, que tenía la forma:

$$\mathcal{K} = \frac{E}{3(1-2\nu)} \tag{4-24}$$

A Tensores.

A.1 Rotación de un sistema de ejes.

La orientación del sistema de ejes cartesianos en el que describiremos nuestros problemas físicos puede ser escogida en forma arbitraria. Es decir, podemos efectuar cualquier rotación del sistema de ejes, pero las propiedades físicas deben mantenerse igual, ya que no pueden depender del sistema de ejes coordenados escogidos.

Para ello encontraremos la relación entre las componentes de la propiedad física expresadas en un sistema de referencia Or o en el sistema de referencia rotado Or'. Comenzaremos estudiando la relación entre los vectores unitarios cartesianos en uno y otro sistema de referencia. En función de los vectores unitarios del sistema Or', el vector unitario $\vec{u}_1$ a lo largo del eje 1 del sistema sin rotar se escribe como

$$\vec{u}_1 = (\vec{u}_1\vec{u}'_1)\vec{u}'_1 + (\vec{u}_1\vec{u}'_2)\vec{u}'_2 + (\vec{u}_1\vec{u}'_3)\vec{u}'_3$$

donde $\vec{u}_1\vec{u}'_1$ representa la proyección del vector unitario $\vec{u}_1$ en la dirección dada por el vector unitario $\vec{u}'_1$, es decir, la componente de $\vec{u}_1$ según $\vec{u}'_1$, $\vec{u}_1\vec{u}'_2$ su componente según $\vec{u}'_2$ y $\vec{u}_1\vec{u}'_3$ su componente según $\vec{u}'_3$. Como todos ellos son vectores unitarios, cada una de estas componentes no es más que el coseno del ángulo que forman los dos vectores unitarios. A este coseno se le denomina coseno director. Análogamente los vectores unitarios$\vec{u}_2$ y $\vec{v}_3$ se escriben, en función de los vectores unitarios del sistema Or', en la forma

$$\vec{u}_2 = (\vec{u}_2\vec{u}'_1)\vec{u}'_1 + (\vec{u}_2\vec{u}'_2)\vec{u}'_2 + (\vec{u}_2\vec{u}'_3)\vec{u}'_3$$
$$\vec{u}_3 = (\vec{u}_3\vec{u}'_1)\vec{u}'_1 + (\vec{u}_3\vec{u}'_2)\vec{u}'_2 + (\vec{u}_3\vec{u}'_3)\vec{u}'_3$$

Si denominamos α_{ij} al coseno del ángulo formado por el eje j del sistema de ejes sin rotar y el eje i del sistema de ejes rotado, podemos resumir todo esto en la tabla

	$\vec{u}_1$	$\vec{u}_2$	$\vec{u}_3$
$\vec{u}'_1$	α_{11}	α_{12}	α_{13}
$\vec{u}'_2$	α_{21}	α_{22}	α_{23}
$\vec{u}'_3$	α_{31}	α_{32}	α_{33}

No todos lo α_{ij} son independientes entre sí. En primer lugar es obvio que el coseno director de un eje i respecto de un eje j es igual al del eje j respecto del eje i, ya que los ángulos únicamente cambian de signo, pero el coseno es indiferente a ese cambio. Además la orientación mutua de dos sistemas de ejes en un espacio tridimensional puede describirse completamente por tres ángulos, los ángulos de Euler, por lo que sólo habrá tres parámetros independientes pudiéndose expresar todos los cosenos directores en función de estos tres parámetros.

A.2 Tensores de orden cero. Escalares.

Un escalar es un ejemplo de tensor del rango más simple. Cuando una propiedad física está representada por un escalar, el valor de éste no depende del sistema de ejes coordenados utilizado. Por ejemplo, la temperatura de un sólido en un punto no depende de si tomamos los ejes del sólido de una forma o de si rotamos estos ejes.

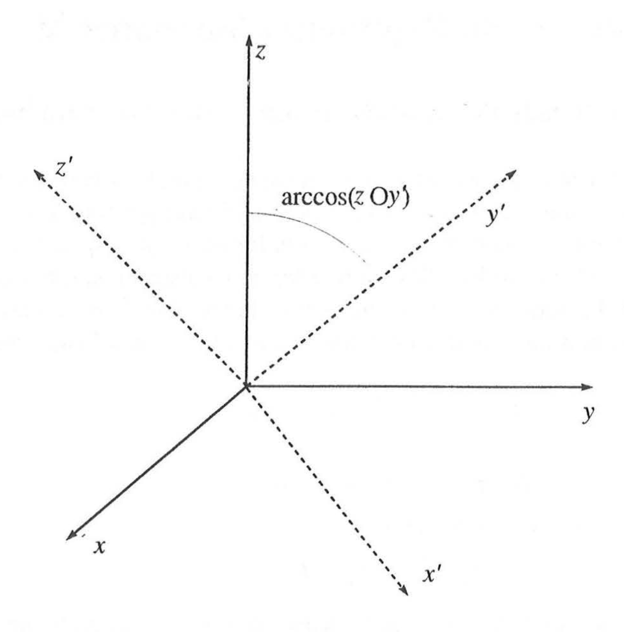


Figura A-1: Rotación de un sistema de ejes.

A.3 Tensores de orden uno. Vectores.

Un vector es un tensor de primer orden. Cuando una propiedad física es de carácter vectorial, su módulo no depende de la orientación escogida para los ejes coordenados, pero sí sus componentes según estos ejes. Si denominamos (v_1, v_2, v_3) a las componentes del vector en el sistema de ejes coordenados $\mathrm{O}r$ y (v_1', v_2', v_3') a las componentes del vector en otro sistema de ejes coordenados $\mathrm{O}r'$, las componentes v_i se obtienen en función de las componentes v_i' en la forma:

$$\begin{aligned} v_i &= v_1 \cos(r_1 \mathrm{O} r_i') + v_2 \cos(r_2 \mathrm{O} r_i') + v_3 \cos(r_i \mathrm{O} r_i') \\ &= \alpha_{i1} v_1 + \alpha_{i2} v_2 + \alpha_{i3} v_3 = \\ &= \sum_{i,j=1,2,3} \alpha_{ij} v_j \equiv \alpha_{ij} v_j \end{aligned} \quad \text{(A-1)}$$

donde en la forma en qué se presenta el último término está implícito que el hecho de que aparezcan índices repetidos implica suma en ese índice para obtener el valor de cualquier v_i

Un tratamiento análogo puede realizarse para las demás componentes. Escrito en forma matricial, el resultado queda como:

$$\begin{aligned} (v_1', v_2', v_3') &= \begin{pmatrix} \cos(r_1 \mathrm{O} r_1') & \cos(r_2 \mathrm{O} r_1') & \cos(r_3 \mathrm{O} r_1') \\ \cos(r_1 \mathrm{O} r_2') & \cos(r_2 \mathrm{O} r_2') & \cos(r_3 \mathrm{O} r_2') \\ \cos(r_1 \mathrm{O} r_3') & \cos(r_2 \mathrm{O} r_3') & \cos(r_3 \mathrm{O} r_3') \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad \text{(A-2)}$$

o escrito en forma más compacta:

$$\vec{v}\,' = \mathcal{R} \cdot \vec{v} = [\alpha_{ij}]\, \vec{v} \quad \text{(A-3)}$$

donde $\mathcal{R}$ es la matriz de rotación cuyas componentes son $\alpha_{ij} = \cos(r_j \mathrm{O} r_i') = \cos(\vec{u}_i' \vec{u}_j) = \vec{u}_i' \cdot \vec{u}_j$.

A.4 Tensores de segundo orden. Representación matricial.

A.4.1 Transformación de un tensor de segundo orden frente a la rotación de ejes.

Consideremos ahora una propiedad física representada por un tensor de segundo orden, representado por una matriz, como es el caso de la conductividad térmica, eléctrica o hidráulica en el caso general. En estos casos, el tensor (al que denominaremos por ejemplo $\hat{T}$) aparece en una expresión de la forma $\hat{T}\cdot\vec{p}=\vec{q}$, donde $\vec{p}$ y $\vec{q}$ son dos vectores relacionados entre sí a través del operador $\hat{T}$, todos ellos expresados en un sistema de referencia Or. Visto desde un sistema de ejes Or', relacionado con el anterior a través de una matriz de rotación $\mathcal{R}$, esta expresión queda en la forma $T'\cdot\vec{p}'=\vec{q}'$. Si en la primera expresión introducimos la matriz de rotación multiplicada por su inversa, deberá de seguir siendo válida:

$$\hat{T}\cdot\vec{p}=\vec{q}=\hat{T}\cdot\mathcal{R}^{-1}\cdot\mathcal{R}\vec{p} \tag{A-4}$$

Si ahora rotamos este vector, se tiene:

$$\mathcal{R}\cdot\vec{q}=\mathcal{R}\cdot\hat{T}\cdot\mathcal{R}^{-1}\cdot\mathcal{R}\cdot\vec{p} \tag{A-5}$$

Ahora bien, $\mathcal{R}\cdot\vec{q}=\vec{q}'$ y $\mathcal{R}\cdot\vec{p}=\vec{p}'$, por lo que deberá ser:

$$\mathcal{R}\cdot\hat{T}\cdot\mathcal{R}^{-1}=\hat{T}' \tag{A-6}$$

que es la forma en que se transforman las componentes de un tensor de segundo rango frente a la rotación. Es decir, si se tiene un conjunto de nueve cantidades dispuesto con un cierto orden en una matriz 3×3, para comprobar si éstas son las componentes de un tensor de segundo orden será suficiente comprobar si relacionan dos vectores (cuyas componentes se transforman como las componentes de un tensor de primer orden). Esto ocurrirá siempre que los dos vectores representen propiedades físicas reales, ya que éstas se transforman de esta forma.

A.4.2 Ecuación de autovalores.

Se denominan ejes principales, vectores principales, o autovectores de un tensor al sistema de ejes coordenados en el cual el tensor tiene forma diagonal. En el sistema de ejes principales, Or_pr, los ejes propios del tensor son $(1,0,0)$, $(0,1,0)$ y $(0,0,1)$ y como en este sistema de ejes el tensor es diagonal, claramente se cumple, para el vector propio $\vec{v}_p^p$ en el sistema de ejes principales pr:

$$\hat{T}_{pr.}\cdot\vec{v}_{pr.}^{p}=\lambda\vec{v}_{pr.}^{p} \tag{A-7}$$

denominándose a λ autovalor, valor propio o valor principal de $\hat{T}$ con el autovector $\vec{v}_p^p$. Aquí utilizamos el superíndice p para denotar que nos referimos al vector principal (o propio) y el subíndice pr para denotar que nos encontramos en el sistema de coordenadas principales. Para ver que ocurre en otro sistema de ejes que se encuentra rotado respecto del anterior con una rotación caracterizada por una matriz de rotación $\mathcal{R}$, hacemos:

$$\mathcal{R}\cdot\hat{T}_{pr.}\mathcal{R}^{-1}\cdot\mathcal{R}\vec{v}_{pr.}^{p}=\lambda\cdot\mathcal{R}\cdot\vec{v}_{pr.}^{p}$$

Esto da la misma expresión anterior A-7 pero en el nuevo sistema de ejes coordenados:

$$\hat{T}\cdot\vec{v}_p=\lambda\cdot\vec{v}_p \tag{A-8}$$

Así, cuando un vector $\vec{v}_p$ está dirigido según una de las direcciones principales, el vector resultante de aplicar $\hat{T}$ sobre el vector $\vec{v}_p$ es proporcional al mismo, con independencia del sistema de referencia respecto del que se representan $\hat{T}$ y $\vec{v}_p$ (pero con ambos expresados respecto del mismo sistema). Pasando todo al primer miembro, la ecuación de autovalores queda:

$$\left(\hat{T}-\lambda\mathbf{I}\right)\vec{v}_p=0 \tag{A-9}$$

donde $\mathbf{I}$ representa la matriz identidad $\mathbf{I}_{ij}=\delta_{ij}$. Al ser $\vec{v}$ un vector no nulo, debe cumplirse que el determinante de $(T-\lambda\mathbf{I})$ es cero, es decir:

$$\begin{vmatrix} T_{11}-\lambda & T_{12} & T_{13} \\ T_{21} & T_{22}-\lambda & T_{23} \\ T_{31} & T_{32} & T_{33}-\lambda \end{vmatrix}=0 \tag{A-10}$$

A.4.3 Propiedades de los tensores simétricos de segundo orden.

Se dice que un tensor de segundo orden es simétrico si sus componentes satisfacen la condición $T_{ij} = T_{ji}$. La mayor parte de los tensores de segundo orden que describen propiedades físicas son simétricos (como ejemplo de excepción tenemos el tensor termoeléctrico). Se dice que un tensor de segundo orden es antisimétrico si sus componentes cumplen que $T_{ij} = -T_{ji}$.

Los tensores simétricos de segundo orden tienen una serie de propiedades muy importantes. Estas son:

- Existe siempre un sistema de ejes en el cual el tensor toma la forma diagonal, con las tres componentes reales. A los ejes de este sistema se les denomina direcciones o ejes principales y a los elementos diagonales del tensor en este sistema de ejes valores propios o valores principales del mismo. Cuando alguno de éstos está repetido se dice que hay degeneración.

$$\begin{pmatrix} T_{11} & T_{12} & T_{13} \\ T_{21} & T_{22} & T_{23} \\ T_{31} & T_{32} & T_{33} \end{pmatrix} \to \mathcal{R} \to \begin{pmatrix} T'_{11} & 0 & 0 \\ 0 & T'_{22} & 0 \\ 0 & 0 & T'_{33} \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} T_1 & 0 & 0 \\ 0 & T_2 & 0 \\ 0 & 0 & T_3 \end{pmatrix} \tag{A-11}$$

- Para un tensor simétrico de segundo orden, la ecuación de autovalores A-10 queda como:

$$\begin{aligned} &-\lambda^3 + (T_{11} + T_{22} + T_{33})\lambda^2 - \\ &-(T_{22}T_{33} + T_{33}T_{11} + T_{11}T_{22} - T_{23}^2 - T_{13}^2 - T_{12}^2)\lambda + \Delta = 0 \end{aligned} \tag{A-12}$$

de soluciones $\lambda = \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \equiv T_1, T_2, T_3$, todas ellas reales. En la ecuación anterior se ha utilizado Δ para el determinante de $|T_ij|$, que para un tensor simétrico de segundo orden como es $[T_{ij}]$ tiene la forma general.

$$\Delta = T_{11}T_{22}T_{33} + T_{12}T_{13}T_{31} + T_{21}T_{32}T_{13} - T_{13}T_{22}T_{31} - T_{12}T_{21}T_{33} - T_{32}T_{23}T_{11} \tag{A-13}$$

Si el sistema de ejes está dirigido a lo largo de las direcciones principales, los elementos de fuera de la diagonal son todos nulos, y el determinante queda $\Delta = \lambda_1\lambda_2\lambda_3 = T_1T_2T_3$, donde $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 (\equiv T_1, T_2, T_3)$ son los valores propios del tensor obtenidos a partir de la ecuación de autovalores A-10.

- Las soluciones λ_i de la ecuación A-12 no dependen del sistema de referencia, y por lo tanto, los coeficientes de λ en dicha ecuación tampoco pueden depender del sistema de referencia. Se dice que son invariantes frente a la rotación. Se denomina traza a la suma de los elementos de la diagonal. En un tensor simétrico de segundo orden, la traza es un invariante frente a la rotación, es decir:

$$I_1 \equiv \sum_i T_{ii} = \sum_i T'_{ii} \tag{A-14}$$

Existen además otros dos invariantes para un tensor simétrico de segundo orden,

$$\begin{aligned} I_2 &= -(T_{22}T_{33} + T_{33}T_{11} + T_{11}T_{22} - T_{23}^2 - T_{13}^2 - T_{12}^2) \\ &= -(T_1T_2 + T_2T_3 + T_3T_1) \end{aligned} \tag{A-15}$$

y el determinante

$$I_3 = T_1T_2T_3 \tag{A-16}$$

correspondientes a los coeficientes de los términos lineal en λ e independiente.

Indice

Bibliografía

[1] Manuel Castañs y Félix Soriano. *Apuntes prácticos de Física: termodinámica y elasticidad.* Cátedra de Física, E.T.S. Arquitectura de Madrid, Madrid, 1987.

[2] Antonio García de Arangoa. *Elasticidad teórica. Fundamentos. Aplicaciones.* Ed. por el autor, Madrid, 1974.

[3] P. Fleury y J. P. Mathieu. *Chaleur, thermodynamique, états de la matière.* Éditions Eyrolles, París, 1964.

[4] L. Landau, A. Ajiezer, y E. Lifshitz. *Curso de Física general: mecánica y Física molecular.* Ed. Mir, Moscú, 1979.

[5] David R. Lovett. *Tensor properties of crystals.* Adam Hilger Books, Bristol, 1989.

[6] William A. Nash. *Resistencia de materiales.* McGraw-Hill, México, 1988.

[7] J. F. Nye. *Physical properties of crystals. Their representation by tensors and matrices.* Oxford University Press, Oxford, 1985.

[8] Fernando Rodríguez-Avial. *Problemas de resistencia de materiales.* Sección de publicaciones. ETS de Ingenieros Indistriales, Madrid, 1976.

[9] Irving H. Shames. *Introducción a la mecánica de los sólidos.* Prentice Hall, N. J., 1979.

[10] P. A. Stiopin. *Resistencia de materiales.* Mir, Moscú, 1976.

[11] S. Timoshenko y J. N. Goodier. *Teoría de la Elasticidad.* Ed. URMO, Bilbao, 1968.

[12] S. Timoshenko y D. H. Young. *Elementos de resistencia de materiales.* Unión Tipográfica Editorial Hispano Americana, S.A., México, 1991.

[13] A. Volmir. *Problemas de resistencia de materiales.* Ed. Mir, Moscú, 1986.

CUADERNO

13.01

CATÁLOGO Y PEDIDOS EN
http://www.aq.upm.es/of/jherrera
jherrera@aq.upm.es

